2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　９ 日現在

機関番号：１１３０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：２０Ｋ０３５１２

研究課題名（和文）概均質ベクトル空間の整数論

研究課題名（英文）Number theory of prehomogeneous vector spaces

研究代表者

雪江　明彦（Yukie, Akihiko）

東北大学・理学研究科・客員研究者

研究者番号：２０３１２５４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：代数体上一般変数の2次形式に対応する直交群の非正規玉河数の密度を決定した。これは Siegel の 1944 年の結果を整数上ではなく有理数上の結果にしたものである(そのほうが難しい)。また、3次体を固定して2次体を動かしたとき、合成体となる6次体の2次体に関する相対の hR の密度を決定した。一方、GIT stratification に関する3部作を発表した。これら一連の論文により、群が一般線形群の積である場合の多くの概均質ベクトル空間に対して、完全体上では、作用が悪い点も含めて、有理軌道を決定し、さらに、帰納的な構造を持つことを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
最初の密度定理は Siegel の結果を 80 年ぶりに改良したものである。2番目の密度定理は相対的な状況で hR の密度を決定したあものとしては最初の結果である。密度定理はいくつか知られているが、主要項だけでは、誤差がよくないことが知られている。2番目以降の項を決定するためにはゼータ関数に関する情報がもっと必要であり、そのためには、概均質ベクトル空間の作用が悪い点も含めて、有理軌道、および帰納的構造を決定する必要がある。GIT stratification に関する結果は重要な場合について、そのような情報をもたらすものである。

研究成果の概要（英文）：We determined the density of unnormalized Tamgawa numbers of orthogonal groups of arbitrary number of variables over any number field. This work is a version over the field of rational numbers (which is more difficult) of Siegel's result over the ring of integers in 1944. We also determined the density of relative hR of quadratic fields and their composition with a fixed cubic field. This result concerns the 8 dimensional prehomogeneous vector space which is the most non-split version of pairs of 2x2 matricess. We also published 3 papers which determined the GIT stratification of many prehomogeneous vector spaces whose groups are products of general linear groups. By these works, we determined rational orbits of those prehomogeneous vector spaces including points where the action is not good. We also determined the inductive structures of the set of rationaal orbits.

研究分野：GIT and anaalytic number theory

キーワード：prehomogeneous　GIT　density theorem　GIT stratification

1. 研究開始当初の背景

概均質ベクトル空間に関しては，いくつかの密度定理が証明されていたが，まだ証明されていないものもあり，また証明されているものもまだ第二項などについてはほとんどわかっていない．大域ゼータ関数，局所ゼータ関数も大きい概均質ベクトル空間についてはよくわかっていなかった．

2. 研究の目的

今回の研究の目的は概均質ベクトル空間に関連した密度定理をなるべく多く証明することと，関連した話題である概均質ベクトル空間の GIT stratification を重要な場合に決定することである．他に概均質ベクトル空間の他の側面も研究を続けることも目的の一つである．

3. 研究の方法

コンピューターの計算以外は実験はないので，基本的には共同研究者と地道に研究を続けるが，自分の見識を広げるために学会，研究集会等に参加したり，分野へのサービスとして研究集会を自身も開催する．コンピューターを使った不変式の計算を沢山行う．これは GIT stratification だけでなく他の目的にも有用かもしれない．

4. 研究の成果

以下が雪江明彦の 2020–2024 の成果である．

(1) GIT stratification に関してはこの期間に 4 部作のうち 3 部を出版した．それは [3], [4], [5] である．

これらの論文では，以下の概均質ベクトル空間に対して GIT stratification を決定した．

(A) $G = \mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$, $V = \mathrm{Aff}^3 \otimes \mathrm{Aff}^3 \otimes \mathrm{Aff}^2$

(B) $G = \mathrm{GL}_6 \times \mathrm{GL}_2$, $V = \wedge^2 \mathrm{Aff}^6 \otimes \mathrm{Aff}^2$

(C) $G = \mathrm{GL}_5 \times \mathrm{GL}_4$, $V = \wedge^2 \mathrm{Aff}^5 \otimes \mathrm{Aff}^4$

(C) は 5 次体をパラメータ化するある意味，概均質ベクトル空間の中で一番重要な場合である．これらの場合に G' を対応する SL の積，T を G' の各成分が対角行列よりなる部分群，$\mathfrak{t}^* = X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ($X^*(T)$ は指標群) とする．$\mathfrak{t}^*_+$ を Weyl chamber とすると，GIT stratification は $\mathfrak{t}^*_+$ のある部分集合 $\mathfrak{B}$ でパラメータ化されている．$\mathfrak{B}$ は組み合わせ論的に定義され計算機による計算が可能である．[3] では，この集合 $\mathfrak{B}$ を (A)-(C) と 4 部で考察中の (D) $G = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_8, V = \wedge^3 \mathrm{Aff}^8$ に対して決定した．$\mathfrak{B}$ は (A)–(D) に対して，49, 81, 292, 183 個のベクトルよりなる．

$\mathfrak{B}$ を決定したとしても，対応する stratum は空集合であるものも多く．どの $\beta \in \mathfrak{B}$ に対して，対応する stratum S_β が空集合でないか決定する必要がある．これを実行したのが [4], [5] である．[4] では，上の (A), (B) に対し，これを実行し，空集合でない S_β の帰納的構造を決定し，その結果として次のように S_β の有理軌道をすべて決定した．

以下，k を完全体とする．$Q_0(v) \in \mathrm{Sym}^2 \mathrm{Aff}^4$ を二次形式 $v_1 v_4 - v_2 v_3$ とする．

定義

(i) $\mathrm{Ex}_n(k) = \mathrm{H}^1(k, \mathfrak{S}_n)$, つまり準同型 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathfrak{S}_n$ の共役類の集合とする．

(ii) $\mathrm{Prg}_2(k)$ PGL_2 の k form の k 同型類の集合とする．

(iii) $\mathrm{QF}_4(k)$ を $\mathrm{GO}(Q_0)^\circ$ の inner form の k 同型類全体の集合とする．

$n = 2, 3$ なら $\mathrm{Ex}_n(k)$ を k の n 次分離拡大の k 同型類全体の集合とする．

定理 1 概均質ベクトル空間 (A) の場合，$S_\beta \neq \emptyset$ であるものは 16 個あり，一つの S_{β_0} を除き $G_k \backslash S_{\beta\, k}$ は 1 点よりなる．また，$G_k \backslash S_{\beta_0\, k}$ は $\mathrm{Ex}_2(k)$ と 1 対 1 に対応する．

定理 2 概均質ベクトル空間 (B) の場合，$S_\beta \neq \emptyset$ であるものは 13 個あり，一つの S_{β_0} を除き $G_k \backslash S_{\beta\, k}$ は 1 点よりなる．また，$G_k \backslash S_{\beta_0\, k}$ は $\mathrm{Ex}_2(k)$ と 1 対 1 に対応する．

[5] では，上の (C) に対し，同様に次の結果を得た．

定理 3

(i) (C) の場合，$S_\beta \neq \emptyset$ であるものは 61 個ある．

(ii) k の標数は 2 でないとする．$S_\beta \neq \emptyset$ なら $G_k \backslash S_{\beta\, k}$ は 1 点 (SP と書く), $\mathrm{Ex}_2(k)$, $\mathrm{Ex}_3(k)$ $\mathrm{Prg}_2(k)$ または $\mathrm{IQF}_4(k)$ となる．またそのような S_β の数は次のようになる．

Type	SP	$\mathrm{Ex}_2(k)$	$\mathrm{Ex}_3(k)$	$\mathrm{Prg}_2(k)$	$\mathrm{IQF}_4(k)$
Number of S_β's	43	12	3	2	1

(2) かなり前にできていた結果だが，紆余曲折を経て雑誌から出版されたので，ここに書いておく．関係する論文は [1], [2], [8] で，今回の期間中に発表されたのは [8] である．ただし，[8] は [1], [2] の結果の改良も含んでいる．これらの論文の結果は任意の代数体上のものだが，簡単のために $\mathbb{Q}$ 上の結果について書く．

$G = \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(n)$, V を n 元二次形式の空間とする．$V_k^{\mathrm{ss}} = \{x \in V_k \mid \det x \neq 0\}$ とし，$x \in V_k^{\mathrm{ss}}$ なら x は非退化という．$\mathrm{SO}(x)$ を x に対応する特殊直交群とする．$Z \subset \mathrm{SO}(x)$ を中心，$\mathrm{PSO}(x) = \mathrm{SO}(x)/Z$ とする．すると，

$$\mathrm{PSO}(x) = \begin{cases} \mathrm{SO}(x) & n \text{ odd}, \\ \mathrm{SO}(x)/\{\pm I_n\} & n \text{ even}. \end{cases}$$

S_n を非退化な x に対する $\mathrm{SO}(x)$ という形の代数群の k 同型類全体の集合とする．すると，$G_k \backslash V_k^{\mathrm{ss}} \ni x \mapsto \mathrm{SO}(x) \in S_n$ は全単射である．$x \in V_k^{\mathrm{ss}}$ に対し，判別式 $\Delta_x \in \mathbb{Z}_{>0} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ という不変量が定義される．$\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ のアデールとすると，$\mathrm{PSO}(x)_{\mathbb{A}}$ には岩澤分解を使った不変測度 $d_{\mathrm{pr}}\tilde{g}_x''$ が定義できる．$\mathrm{vol}(\mathrm{PSO}(x)_{\mathbb{A}}/\mathrm{PSO}(x)_{\mathbb{Q}})$ をこの測度による体積とする．

以下，n が奇数なら $r = \frac{n-1}{2}$, n が偶数なら $r = \frac{n}{2}$ とおく．素数 p に対し

$$E_p = 1 - \frac{3}{4}p^{-2} - \frac{1}{4}p^{-3} - p^{-r-1} + \frac{1}{2}p^{-r-2} + \frac{1}{2}p^{-r-3} + \frac{1}{4}p^{-2r-2} - \frac{1}{4}p^{-2r-3},$$
$$E_p' = 1 - p^{-2} - p^{-2r-1} + p^{-2r-2} + \frac{1}{4}p^{-3}\frac{(1-p^{-1})^2(1-p^{-(r-1)})(1-p^{-2r})}{1-p^{-2}}$$

とおく．$\Gamma(s)$ をガンマ関数とし，

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2}),\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{1-s}\Gamma(s).$$

とする．$0 \leq \mathbb{i} \leq r$ に対し $S_{n,\mathbb{i}}$ を S_n の元で符号 $(n-\mathbb{i}, \mathbb{i})$ である x に対応するもの全体とする．

n が奇数の場合は以前の結果があったが，[8] では，改良されたタウバー型定理の結果を使い，以下の結果を述べた．

定理 4 $n = 2r+1 \geq 3$ とする．このとき

$$\lim_{X\to\infty}(X^{\frac{n+1}{2}}/\sqrt{\log X})^{-1} \sum_{\substack{x \in S_{n,\mathbb{i}} \\ \Delta_x \leq X}} \mathrm{vol}(\mathrm{PSO}(x)_{\mathbb{A}}/\mathrm{PSO}(x)_{\mathbb{Q}})$$
$$= \frac{2^{-r+\frac{\mathbb{i}(n-\mathbb{i}+1)}{2}+1}}{(n+1)\sqrt{\pi}} \prod_{1\leq j\leq \mathbb{i}} \Gamma_{\mathbb{R}}(j) \prod_{1\leq j \leq n-\mathbb{i}} \Gamma_{\mathbb{R}}(j) \prod_{j=1}^{r} \zeta(2j) \left(\prod_p E_p\right)^{\frac{1}{2}}.$$

[8] の主結果は n が偶数の場合の次の定理である．

定理 5 $n=2r\geq 2$ とする．このとき

$$\lim_{X\to\infty} X^{-\frac{n+1}{2}} \sum_{\substack{x\in S_{n,\mathbb{i}} \\ \Delta_x\leq X}} \mathrm{vol}(\mathrm{PSO}(x)_{\mathbb{A}}/\mathrm{PSO}(x)_{\mathbb{Q}})$$
$$= \frac{2^{-n+\frac{\mathbb{i}(n-\mathbb{i}+1)}{2}+2}}{n+1} \prod_{1\leq j\leq \mathbb{i}} \Gamma_{\mathbb{R}}(j) \prod_{1\leq j\leq n-\mathbb{i}} \Gamma_{\mathbb{R}}(j) \prod_{1\leq j\leq r} \zeta(2j) \prod_p E'_p.$$

なお，$n=2$ の場合は Goldfeld–Hoffstein の定理であり，上の結果は 1944 年の Siegel の $\mathbb{Z}$ 上の結果を $\mathbb{Q}$ 上の結果 (このほうが難しい) にしたものである．

(3) この期間中にもう一つの密度定理を得た．関係する論文は [6], [7] で，[7] は期間中に発表された．ここでも簡単のために基礎体は $\mathbb{Q}$ とする．

3 次体 $\widetilde{k}$ を固定する．$\widetilde{k}/\mathbb{Q}$ は 3 では不分岐とする．p を素数とする．$\widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p\cong\mathbb{Q}_p\oplus\mathbb{Q}_p\oplus\mathbb{Q}_p$, $\widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p\cong\widetilde{k}_p\oplus\mathbb{Q}_p$, なら，$\widetilde{k}$ の p でのタイプはそれぞれ (triv), (quad) という．$\widetilde{k}_p=\widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p$ が体なら，$\widetilde{k}$ の p でのタイプは (cubic) という．(quad) の場合 δ_p を $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ の判別式のオーダーとする．

素数 p に対し，定数 E_p を次の表のように定める．($\lfloor x\rfloor$ は x 以下の最大の定数).

Case	E_p
(triv)	$(1-p^{-2})(1-3p^{-3}+2p^{-4}+p^{-5}-p^{-6})$
(quad) $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ unramified	$(1-p^{-4})(1-p^{-2}-p^{-3}+p^{-4})$
(quad) $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ ramified	$(1-p^{-1})(1-p^{-2})(1+p^{-2}-p^{-3}+p^{-2\delta_p-2\lfloor\delta_p/2\rfloor-1})$
(cubic) $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ unramified	$1-p^{-2}-p^{-4}+p^{-5}-p^{-7}+p^{-8}$
(cubic) $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ ramified	$(1-p^{-1})(1-p^{-4})$

なお $p\neq 2$ でタイプ (quad) で $\widetilde{k}_p/\mathbb{Q}_p$ が分岐なら $\delta_p=1$, $E_p=(1-p^{-1})(1-p^{-4})$ である．

$$c_\infty(\widetilde{k})(+)=\begin{cases}\frac{1}{8} & \widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\mathbb{R}^3,\\ \frac{1}{4\pi} & \widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{C},\end{cases}\qquad c_\infty(\widetilde{k})(-)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi^2} & \widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\mathbb{R}^3,\\ \frac{1}{4\pi} & \widetilde{k}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}.\end{cases}$$

と定義する．

2 次体 F に対し $L=\widetilde{k}\cdot F$, $T(F)=\{x\in\mathrm{R}_{L/k}\mathrm{GL}(1)\mid \mathrm{N}_{L/F}(x)\in\mathrm{GL}(1)\}$ とする．また

$$M(F)=\mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q},T(F))\to\mathrm{H}^1(\mathbb{R},T(F))\times\prod_v\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p,T(F))),$$

$i(F)=\#M(F)$ と定義する．論文では $i(F)={}^{r(F)}$ で $r(F)=0,1$ であり，$\widetilde{k}/\mathbb{Q}$ が正規拡大でなければ $r(F)=0$ であることを証明している．このとき，次の定理が [6], [7] の主定理である．

定理 6

$$\lim_{X\to\infty} X^{-2} \sum_{[F:\mathbb{Q}]=2,0<\pm\Delta_F<X} \frac{h_{\widetilde{k}\cdot F}R_{\widetilde{k}\cdot F}}{h_F R_F}(1+i(F)^{-1})$$
$$=|\Delta_{\widetilde{k}}|^{\frac{1}{2}} h_{\widetilde{k}} R_{\widetilde{k}} c_\infty(\widetilde{k})(\pm)\zeta_{\widetilde{k}}(2)\prod_p E_p.$$

ここで Δ_F,h_F,R_F などは判別式，類数，単数基準である．

参考文献

[1] N. Hayasaka and A. Yukie. On the density of unnormalized tamagawa numbers of orthogonal groups I. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2):545–607, 2008.

[2] N. Hayasaka and A. Yukie. On the density of unnormalized Tamagawa numbers of orthogonal groups. II. *Amer. J. Math.*, 131(3):683–730, 2009.

[3] K. Tajima and A. Yukie. On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces I. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 68(1):1–48, 2020.

[4] K. Tajima and A. Yukie. On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces II. *Tsukuba J. Math.*, 44(1):1–62, 2020.

[5] K. Tajima and A. Yukie. On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces III. *Kyushu J. Math.*, 76(2):209–368, 2022.

[6] A. Yukie. On the density theorem related to the space of non-split tri-Hermitian forms I. *J. Number Theory*, 194:117–169, 2019.

[7] A. Yukie. On the density theorem related to the space of non-split tri-Hermitian forms II. *Manuscripta Math.*, 162(1):221–239, 2020.

[8] A. Yukie. On the density of unnormalized Tamagawa numbers of orthogonal groups III. *J. Number Theory*, 238:557–610, 2022.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 K.Tajima and A.Yukie	4．巻 76 (2)
2．論文標題 On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces III	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Kyushu J. Math.	6．最初と最後の頁 209--368
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 A.Yukie	4．巻 238
2．論文標題 On the density of unnormalized Tamagawa numbers of orthogonal groups III	5．発行年 2022年
3．雑誌名 J. Number Theory	6．最初と最後の頁 557-610
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2021.09.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 K. Tajima and A. Yukie	4．巻 68
2．論文標題 On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces I	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Comment. Math. Univ. St. Pauli	6．最初と最後の頁 1-48
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 K. Tajima and A. Yukie	4．巻 44
2．論文標題 On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces II	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Tsukuba J. Math.	6．最初と最後の頁 1-62
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.21099/tkbjm/20204401001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 A. Yukie	４．巻 162
２．論文標題 On the density theorem related to the space of non-split tri-Hermitian forms II	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Manuscripta Math.	６．最初と最後の頁 221-239

掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-019-01116-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 A. Yukie	４．巻 B77
２．論文標題 Rational orbits of prehomogeneous vector spaces	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Algebraic number theory and related topics 2016, RIMS K\^{o}ky\^{u}roku Bessatsu	６．最初と最後の頁 179-182

掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 Akihiko Yukie
２．発表標題 On the GIT stratification of prehomogeneous vector spaces
３．学会等名 10th Pan Asian Number Theory Conference.（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関