様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　６月３０日現在

機関番号：２４６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ０３５１８

研究課題名（和文）非同型な自己正則写像を持つコンパクト複素多様体の研究

研究課題名（英文）Classifications of compact complex manifolds admitting non-isomorphic endomorphisms

研究代表者
藤本　圭男（Fujimoto, Yoshio）

奈良県立医科大学・医学部・教授

研究者番号：９０１９２７３１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：小平次元が負の非特異な3次元射影代数多様体で、非同型なエタール自己正則写像を持つものの類は有限次エタール被覆をとる操作を除いて６種類に分類できることを証明した。有理曲面と楕円曲線との直積をただ一つの例外として、森理論における端射線は高々有限個、または自己正則写像の有限回の反復合成で閉じること、従って同変極小モデル計画は自己正則写像の範疇で機能することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
非特異３次元射影代数多様体で非同型な自己正則写像を許す類の分類を完全に遂行した点が際立っている。

研究成果の概要（英文）：Classificatioins of smooto projective 3-folds with negative Kodaira dimension which admit a nonisomorphic \'{e}tale endomorphism f has been done: Such varieties can be classified into 6 types. We show that such a variety has at most finite extremal rays R or R is presereved some power of f

研究分野：代数幾何学

キーワード：endomorphism　extremal ray　minimal model program　ESP　Atiyah surface

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

## １．研究開始当初の背景

コンパクト複素多様体 X から自身への全射正則写像 f が自己同型写像でないとき、非同型な自己正則写像（endomorphism，略称 endo）という。X が射影代数多様体ならば f は必然的に有限射、更に X の小平次元が非負ならば f は不分岐である。代数多様体の自己正則写像は基本的対象でありながら、代数幾何では、小平次元が負であるファノ等質空間（例えば、射影空間、グラスマン多様体）の場合に限って単発的に調べられているだけだった。他方、複素力学系では、主に射影空間や K３曲面上の非自明な自己正則写像が研究されてきた。そこでは多様体 X の構造より、その上の全射自己正則写像 f に対してその k 回の反復合成を考え、k を無限大に飛ばした際の写像の振る舞いの考察に重点を置く。私は中山昇氏（京大数理研）との共同研究で小平次元が非負の非特異３次元射影代数多様体 X で、非同型な自己正則写像を許す非特異射影代数多様体の完全な分類に成功した．鍵は森氏による端射線の理論と中山氏による楕円ファイバー空間の理論であった．この成果の自然な続きとして非同型な自己正則写像を有する小平次元が負の多様体、即ち単線維的(uniruled)多様体の分類に取り組んだ。極小モデル理論を自正則写像に適用し極小モデル上の自己正則写像を分類する試みは自然であり本研究もその流れに沿っており同変極小モデル計画の手頃な実験台である．

## ２．研究の目的

本研究の目的は非同型な自己正則写像を有するコンパクト複素多様体の構造を複素多様体の分類論の視点から出来る限り具体的に調べることである.それは、楕円曲線やアーベル多様体,トーリック多様体を含むクラスであり非常に簡明な構造を持つと予想される．それは、楕円曲線やアーベル多様体,トーリック多様体を含むクラスであり非常に簡明な構造を持つと予想される．我々の視点では主役は多様体 X であって自己正則写像 f は単に脇役であり f の合成積を取る操作や自己同型写像と合成する操作により自由に取り替えてよい．本研究では主に小平次元が負の非特異３次元射影代数多様体で非同型なエタール自己正則写像を有するものを研究した．

## ３．研究の方法

コロナ禍で出張やセミナー参加が不可能であったため，代数幾何学の endo,auto さらに極小モデル関連の論文を検索しつつ参考となる技法を学びながら論文執筆を進めた．

## ４．研究成果

A) 複素多様体の分類論の視点から小平次元が負の非特異３次元射影代数多様体 X で非同型なエタール自己正則写像(略称 endo)を持つものの構造を研究した．一般の設定では問題が難し過ぎる為、Endo がエタールという仮定の下で研究した．先ず得られた結果を大雑把に述べる．

主要結果：上のような多様体 X に対してその適当なエタールガロワ被覆 X’を取ると，

X’は６種類の型のいずれかに分類される：

X’の典型的な類としては小平次元が負の非特異代数曲面と楕円曲線との直積が挙げられる。この類は小平次元が非負な場合の分類結果の類似物に相当する。残りの５種類は小平次元が負の場合に出現する新しい型であり、その記述は上例ほど単純でない。例えば楕円曲線上のランク３で次数０の分解不能・半安定ベクトル束に付随する射影束、及びそれらの切断を中心とする爆発(blow-up)により得られる多様体が該当する。

(B)次に分類方法の概略と分類の過程で得られた結果を述べる．非同型な自己正則写像を有する３次元射影代数多様体 X（小平次元に因らない）の標準束 K_X がネフでないとする．X の K_X-負な端射線 R が因子型（即ち R の収縮写像 π が双有理写像を与える）ならば X は非特異射影代数多様体 X’上の楕円曲線 E を中心とする爆発により得られる事を森理論により証明した．同時に E の X’における法束はランク２、次数０の半安定ベクトル束となる事も示した．Atiyah により楕円曲線上のベクトル束の分類は為されている．特徴的な点は E の法束は適当な底変換の下で自明または分 Atiyah の F_2 なるベクトル束のいずれか２種類に取れる点にある．この最後の主張は一般論から直ぐに従う訳でなく多様体の分類課程における副産物として得られる．非同型な自己正則写像がエタールという仮定が本質的に用いられている。この定理を(X, f) に適用して同変極小モデル・プログラム（MMP）を走らせた．R を非同型な自己正則写像 f: X→X を持つ射影代数多様体 X 上の $K_X$-負な端射線とする．X の小平次元が負の場合には新たな困難が生ずる．ひとつの要因として K_X-負な無限個の端射線 R を持つ多様体が存在することが挙げられる。このような R は因子型（つまり R の収縮写像が双有理正則写像）であり、f の如何なる反復合成の下でも保存されない例が構成できる。従って R の収縮写像は自己正則写像を誘導するとは限らず、非同型な３次元射影代数多様体の間の非同型なエタール有限射の無限列を

誘導するに過ぎない。X からスタートし有限回のブローダウンを施すことにより，ついには因子型の端射線を持たない非同型射影代数多様体，及びそれらの間の非同型なエタール有限射の無限列を得る．これを(FESP)と命名した．従って X の分類方針は以下に帰着される：(あ) 先ず FESP の構造を決定する．（ろ）次に逆のプロセス，即ち FESP に楕円曲線を中心とする爆発(blow-up)を有限回施して元来の多様体X及び非同型なエタール自己正則写像 f を復元することの２点である．

(C)(い)に関しては森氏による３次元非特異射影代数多様体の端射線 R の分類定理が適用可能である．先ず FESP の端射線 R が C 型，即ち R の収縮写像が非特異代数曲面上のコニック束の構造を与える場合を考察した。底曲面の上に非同型なエタール有限射の無限列が誘導されることから，底曲面の可能性は底変換を許せば３通りであり，種数２以上の曲線と楕円曲線との直積，アーベル曲面，又は楕円曲線上のランク２の半安定ベクトル束に付随した射影束のいずれかである。次に R が D 型，即ち R の収縮写像が曲線上の Del Pezzo 曲面をファイバーとするファイバー空間の場合を考察し楕円曲線上の Del Pezzo 曲面を典型ファイバーとするファイバー束となる事を示した。いずれの場合も底変換と有限回のブローダウンを施すことにより、X の FESP が楕円曲線上の射影束、又は P^1×P^1-束の場合に帰着出来る。(ろ）に関してはＦESP 上の楕円曲線で爆発の中心となるべきものの候補には非常に厳しい制約条件が課される。それらの楕円曲線を中心とする爆発を逐次重ねて、元の多様体 X と非同型自己正則写像 f の大まかな構造が復元できる。

（D）しかし FESP は単に非同型なエタール有限射の無限列であり、如何なる原理により FESP から元来の自己正則写像 f が復元されるか？という疑問が残る：そこで X の大雑把な描像を手がかりに更に解析を進めた結果， X の有限次不分岐被覆が楕円曲線と有理曲面の直積となる場合を唯一の例外とし，X 上の端射線は高々有限個しか存在しない，または無限個の端射線が存 f の有限回の反復合成で閉じるような端射線 R を見出すことが出来ることを示した．よって大方の場合 MMP は自己正則写像の範疇でうまく機能することが分った．再度 MMP を走らせて(C)の作業，即ち X の FESP を解析した上で楕円曲線による爆発を遂行した．更に X が C 型でコニック束の底曲面が楕円繊維曲面 S となる場合 S は本質的に２種類であることも示された．この系として (B) で述べた事実，つまり端射線 R の収縮写像の例外因子の型が本質的に２種類であることが従う．

（E）X の FESP が D 型の場合 FESP は楕円曲線上の P^2-束，または P^1×P^1-束に還元されるよって我々の状況下では、Atiyah による楕円曲線上のベクトル束に関する分類結果が適用可能である．特に F_2 という分解不能・階数２の半安定ベクトル束が本質的に関与する。DESP 上の楕円曲線を中心とする爆発の作業も非常に明示的である。
X の FESP が(C)型の場合に端射線の有限性を示す際に丸山氏によるベクトル速の基本変換の技巧が重要な役割を果たす．FESP が C 型，D 型の大半の場合 X のアルバネーゼ写像は楕円曲線 C 上のファイバー束の構造を与えることも示した．
（A）から（E）の段階を踏まえて我々は主結果、即ち X が６通りに分類されることを示した。我々の分類は証明は長大であるものの、結果は非常に具体的である．

（F）楕円繊維曲面 S とその上の P^1-ファイバー空間 X が与えられたとき、X 上に非同型なエタール自己正則写像が存在するか否か？という疑問にも解答を与えた．S の構造はエタール分岐被覆をとれば２種類に限定されることを証明した。それは主定理の副産物であるが FESP とは無縁の形で定式化されており X が非同型な自己準同型写像を持つための非常に簡単な判定条件を与えている。

これらの成果は４編の論文にまとめ上げげた．Part I(上で述べた戦略の概要説明)，Part II(FESP が(C_0)，(C_1)型の場合の分類結果）は既に阪大紀要に掲載済，Part III(FESP が(D)型の場合の分類結果)は京大紀要に掲載予定、最終編の Part IV(FESP が(C)型の場合の分類結果)は現在投稿中である．

## ５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　3件）

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Yoshio Fujimoto | ４．巻<br>59 |
| ２．論文標題<br>\{E}tale Endomorphisms of 3-Folds. II | ５．発行年<br>2022年 |
| ３．雑誌名<br>Osaka Journal of Math | ６．最初と最後の頁<br>1-14 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Yoshio Fujimoto | ４．巻<br>98, Ser A, No.1 |
| ２．論文標題<br>Some remarks on finiteness of extremal rays of divisorial type | ５．発行年<br>2022年 |
| ３．雑誌名<br>Proc. of the Japan Acad | ６．最初と最後の頁<br>7-12 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Yoshio Fujimoto | ４．巻<br>- |
| ２．論文標題<br>\{e}tale Endomorphisms of 3-Folds. III | ５．発行年<br>2023年 |
| ３．雑誌名<br>Kyoto Journal of Math | ６．最初と最後の頁<br>- |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著<br>－ |

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

## ６．研究組織

| | 氏名<br>（ローマ字氏名）<br>（研究者番号） | 所属研究機関・部局・職<br>（機関番号） | 備考 |
|---|---|---|---|

## ７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
| --- | --- |