

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03522

研究課題名(和文) 特異点の解消を用いた可換環論の研究

研究課題名(英文) Commutative Ring Theory via Resolution of Singularities

研究代表者

渡辺 敬一 (Watanabe, Kei-ichi)

明治大学・研究・知財戦略機構(生田)・研究推進員(客員研究員)

研究者番号：10087083

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：2次元正規特異点の整閉イデアルに関し、渡辺は奥間智弘山形大教授、吉田健一日本大学教授と共に、以前、「Pg イデアル」の概念を提唱し、有理特異点が「すべての整閉イデアルが Pg イデアルである」という性質で特徴づけられる事を示した。今回は、奥間、吉田教授と、Grnova 大学の Evelina Rossi 教授との共同研究で、pg イデアルに次ぐ「良い」イデアルとして「楕円イデアル」の概念を導入した。これにより、楕円型特異点のイデアル論が特徴づけられた。また、整閉イデアルの、正規還元数が異なる例を初めて発見した。
また正標数の特異点論に於いてはHilbert=Kunz 重複度の新たな上限を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

可換環論は代数幾何学と深く結びついている、可換環論の最も重要な対象であるイデアルに対して、その環論的性質を幾何学的に解析する事は今まで行われて来なかった。本研究は、2次元の正規特異点に対して幾何学的な情報を用いて、環論的性質を導くもので、大変独自性が高い。実際、今まで知られていなかった、正規還元数を持つイデアルを幾何学的情報によって発見でき、またその代数的な表現を与えた事は大変大きな成果であった。また、正標数の可換環論の手法を用いて、幾何学的な性質を与える事は将来幾何学的な情報をコンピューターで計算を可能にするために役に立つ可能性を持っている。

研究成果の概要(英文)：I studied with Tomohiro Okuma (Yamagat Univ.) and Ken-ichi Yoshida (Nihon Univ.) integrally closed ideals in a 2-dimensional normal singularities. After our previous work on pg-ideals, we proposed a new class of ideals called "elliptic ideals" and showed nice properties of such ideals. This notion came up during the joint work with Okuma, Yoshida and M.-E. Rossi (Genova Univ.). This notion is useful to characterize "elliptic singularities". We also found a new example where the 2 notions of "normal reduction numbers" are different.

In theory of positive characteristics, I found a new lower bound of Hilbert-Kunz multiplicities (joint work with Yoshida, I. Smirnov et. al) and

研究分野：可換環論，代数幾何学，特異点論

キーワード：正規特異点 特異点解消 整閉イデアル 還元数 Gorenstein 環 Hilbert-Kunz 重複度 楕円型特異点 数値半群

「特異点の解消を用いた可換環論の研究」(2020-2024) 研究報告

渡辺 敬一

1. 研究開始当初の背景

渡辺は山形大学の奥間智弘教授, 日本大学の吉田健一教授と共に, 特異点の解消を用いた整閉イデアルの研究の準備を行い, p_g イデアルの概念や, normal reduction number $\bar{r}(I), nr(I)$ の概念を得ていた. この研究を一層発展させるのが本研究の目的であった.

正標数の可換環論を用いた Hilbert-Kunz 重複度, F-signature 等の概念 (以下では「正標数の手法」と略) については渡辺と吉田が例えば「 A が正則 $\iff e_{HK}(A) = 1$ ($e_{HK}(A)$ は Hilbert-Kunz 重複度), A が正則でない時, $\dim A = 2$ なら $e_{HK}(A) \geq 3/2$, $\dim A = 3$ なら $e_{HK}(A) \geq 4/3$ 」等々の基礎的な部分を研究していた.

2. 研究の目的

2次元の正規局所環 (A, \mathfrak{m}) を与えたとき, A の整閉イデアル I に対して, $\bar{r}(I), nr(I)$ 及び 4. で述べられる概念 $q(I)$ のすべての可能性を決定し, 「 A のイデアルの挙動のすべての可能性を決定する」(例えば A が有理特異点の場合, すべての I について $\bar{r}(I) = nr(I) = 1, q(I) = 0$) のが研究の目的であった.

正標数の手法に関しては Hilbert-Kunz 重複度や F-signature の更なる理解が求められる.

3. 研究の方法

数学の研究は, 対話によって進んでいく面がある. 「対話」もある程度はメールなので代替できる部分もあるが, 実際に対面で議論を重ねるのは質的に充実感, 効果が異なる. しかし, この研究の準備段階では全く予期しなかった covid19 の蔓延により, 2021 年度の終わりまでは, 出張による研究連絡が全く不可能であった. その間は, しかし, 全く予見できなかった on line により世界各国の「セミナー」に出席が可能となった. 実際, 渡辺も California, Mumbai のセミナーに「出席」し, 講演も行った. このために, 書画カメラ, タブレットなどの, on line での講演のための機材も今回の研究費で購入した. しかし, 一方で, これらの「セミナー」は対面での講演に遠く及ばない面もあった.

4. 研究成果

この項では国際的な学術雑誌より出版されたもの, 投稿中または準備中の結果を解説する, 発表はすべて英語でなされており, また, 多くの数学的な述語などが登場し, しかもそれらの術語の和訳はまだ存在しないものが多いので, 以下は英語で記述する.

Results obtained in this research.

1. INTEGRALLY CLOSED IDEALS IN 2 DIMENSIONAL NORMAL SINGULARITIES

We want to study a 2 dimensional local ring (A, \mathfrak{m}) . To study the properties of the ring A , the behavior of the ideals are essential as we will see later. So we want to study the properties of an integrally closed \mathfrak{m} -primary ideal I of A .

The point of this research is to study the properties of I by a resolution of singularities

$$f : X \rightarrow \text{Spec}(A)$$

of A such that $I\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$, where we put $\mathbb{E} = \bigcup_{i=1}^r E_i$ and $Z = \sum_{i=1}^r n_i E_i$ is a cycle on X .

We will denote $I = I_Z$ in the following.

In this Section, let (A, \mathfrak{m}) be a Noetherian commutative local ring with the unique maximal ideal \mathfrak{m} and the residue field $k = A/\mathfrak{m}$. Also, we assume that A is a two-dimensional excellent normal local domain (which is not regular) containing an algebraically closed field k .

It was well known that

$$p_g(A) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

is a very important invariant of the singularity. For example, “ A is a rational singularity” is equivalent to say “ $p_g(A) = 0$ ”.

Also, another invariant was defined;

$$p_a(A) = \max\{p_a(Z) \mid \text{where } Z > 0 \text{ positive cycle on } \mathbb{E}\}$$

Likewise the case of rational singularities, “Elliptic Singularities” are defined by $p_a(A) = 1$.

The notion of reduction numbers is very important in ideal theory. Let $Q \subset I = I_Z$ be a minimal reduction of I ; namely $Q = (a, b)$ is generated by a parameter system (a, b) of A and $Q\mathcal{O}_X = I\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$.

The notion of reduction numbers are very important in ideal theory and since we are interested in integrally closed ideals, we define the notion of normal reduction numbers. For any \mathfrak{m} -primary integrally closed ideal $I \subset A$ and its minimal reduction Q , we put

$$\begin{aligned} \text{nr}(I) &= \min\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \overline{I^{r+1}} = Q\overline{I^r}\}, \\ \bar{r}(I) &= \min\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \overline{I^{n+1}} = Q\overline{I^n} \text{ for all } n \geq r\}. \end{aligned}$$

Also we define $\text{nr}(A)$ and $\bar{r}(A)$ the maximum of $\text{nr}(I), \bar{r}(I)$, respectively for all \mathfrak{m} -primary integrally closed ideals I in A .

Also, we defined the notion

$$q(I) = q(I_Z) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X(-Z))$$

and

$$q(nI) = q(\overline{I^n}) = \dim_k(H^1(X, \mathcal{O}_X(-nZ))).$$

This definition includes the case that $q(0I) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) = p_g(A)$.

We have found that the sequence $\{q(nI)\}$ is a non-increasing sequence of n and if $q(nI) = q((n+1)I)$ for some n , then $q(nI) = q(mI)$ for every $m \geq n$ [OWY1].

We defined the notion of p_g -ideal.

Definition 1.1. ([OWY1]) $I = I_Z$ is a p_g ideal if $q(I) = p_g(A)$. Then I is a p_g -ideal if and only if $\bar{r}(I) = 1$.

In this context, we see that A is a rational singularity if and only if every integrally closed \mathfrak{m} -primary ideals in A is a p_g -ideal, or, in another word, $\bar{r}(A) = 1$. Also Okuma found that if A is an elliptic singularity, then $\bar{r}(A) = 2$.

Up to this point the result above was obtained before the beginning of this research. The most important results obtained during this research was the following. These results are obtained by joint work with T. Okuma and K. Yoshida.

Main Results.

- (1) In the case A is a normal hypersurface given by a **homogeneous** polynomial of degree d . Then succeeded to prove that $\bar{r}(A) = \text{nr}(\mathfrak{m}) = d - 1$. This result was published in [OWY5]. Also we gave the first example of I such that $\text{nr}(I) < \bar{r}(I)$. Actually, for all positive integer $g \geq 2$, we gave an example of I , such that $\text{nr}(I) = 1$ and $\bar{r}(I) = g + 1 = p_g(A) + 1$. We also give an “algebraic” expression (the expression by defining equation and generators of the ideal) ([OWY5]).
- (2) We studied throughly the property of I with $\bar{r}(I) = 2$. We introduced the name “elliptic ideal” for I with $\bar{r}(I) = 2$. This work was a joint work with M.E. Rossi of Genova University ([ORWY]).
- (3) We gave a new bound for $\bar{r}(A)$ as $\bar{r}(A) \leq p_a(A) + 1$, extending Okuma’s result for elliptic singularities. Actually the invariant $p_a(A)$ seldom appear in the literature except the case $p_a(A) = 1$. So our result gives a new meaning to this invariant. We are preparing the manuscripts containing this result as well as the next one.

2. HILBERT-KUNZ MULTIPLICITY, METHOD OF POSITIVE CHARACTERISTICS.

Methods using commutative ring theory of positive characteristics are extensively used in commutative rings as well as minimal model programs in algebraic geometry and singularity theory. In this research, I worked on the problems related to the theory of Hilbert-Kunz multiplicity defined by $e_{HK}(I) = \lim_{q=p^e \rightarrow \infty} \frac{\ell_A(A/I^{[q]})}{q^d}$. Also, V. Trivedi defined the notion of “Hilbert-Kunz density function” $HKd((A, I); x)$ for a standard graded ring and graded ideal I of finite colength with the property

$$\int_0^\infty HKd((A, I); x) dx = e_{HK}(I).$$

The main results of this research are the following;

Main Results.

- (1) Extended the definition of $HKd((A, I); x)$ to general graded rings and gave explicit form for invariant rings. This was a joint work with Vijatlaximi Trivedi (Tata Institute of fundamental researches) and published as [TrWa].
The followings results were obtained from a joint work with Jack Jeffries (Univ. Nebraska), Ilya Smirnov (Basque Center of Applied Mathematics), Yusuke Nakajima (Kyoto Industrial University) and Ken-ichi Yoshida (Nihon UNiversity) and published as [JNSWY].
- (2) Gave a new better lower bound of $e_{HK}(I)$ relative to Hilbert-Samuel multiplicity $e(I)$.
- (3) It was known that $s(A) \leq 1/n$ ($n = 2, 3, \dots$) if $\dim A = 2$ and A is not regular. Gave an upper bound of $s(A)$ in case $\dim A = 3$. Namely, $s(A) \leq 2/3$ if the multiplicity of A is 2 and $s(A) \leq e(A)/24$ if A is Gorenstein and $e(A) \geq 3$. Also we showed that $s(A) \leq 1/2$ if A is not Gorenstein and determined the condition for $s(A) = 1/2$.

REFERENCES

- [ORWY] Tomohiro Okuma, Maria Evelina Rossi, Kei-ichi Watanabe, and Ken-ichi Yoshida, *Normal Hilbert coefficients and elliptic ideals in normal two-dimensional singularities*, Nagoya Math. J. **248** (2022), 779–800.
- [ORWY] Tomohiro Okuma, Maria Evelina Rossi, Kei-ichi Watanabe, and Ken-ichi Yoshida, *Normal Hilbert coefficients and elliptic ideals in normal two-dimensional singularities*, Nagoya Math. J. **248** (2022), 779–800.
- [OWY1] Tomohiro Okuma, Kei-ichi Watanabe, and Ken-ichi Yoshida, *Good ideals and p_g -ideals in two-dimensional normal singularities*, Manuscripta Math. **150** (2016), no. 3-4, 499–520.
- [OWY2] ———, *Rees algebras and p_g -ideals in a two-dimensional normal local domain*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 1, 39–47.
- [OWY3] ———, *A characterization of two-dimensional rational singularities via core of ideals*, J. Algebra **499** (2018), 450–468.
- [OWY4] ———, *Normal reduction numbers for normal surface singularities with application to elliptic singularities of Brieskorn type*, Acta Math. Vietnam. **44** (2019), no. 1, 87–100.
- [OWY5] ———, *The normal reduction number of two-dimensional cone-like singularities*, Proc. Amer. Math. Soc. **149** (2021), no. 11, 4569–4581.
- [TrWa] V. Trivedi and Kei-ichi Watanabe, *Hilbert-Kunz density functions for graded domains*, J. Pure and Appl. Algebra, **226** (2022), 28 pp.;
- [JNSWY] J. Jeffries, Y. Nakajima, I. Smirnov, K. Watanabe and Ken-ichi Yoshida, *Lower bounds on Hilbert–Kunz multiplicities and maximal F -signatures*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **174** (2023), no. 2, 247–271;

(渡辺 敬一) 明治大学 研究・知財戦略機構 (生田)
Email address: ke1-watanabe@jcom.home.ne.jp

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 JEFFRIES JACK、NAKAJIMA YUSUKE、SMIRNOV ILYA、WATANABE KEI-ICHI、YOSHIDA KEN-ICHI	4. 巻 174
2. 論文標題 Lower bounds on Hilbert-Kunz multiplicities and maximal F -signatures	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 247 ~ 271
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/S0305004122000238	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 OKUMA TOMOHIRO、ROSSI MARIA EVELINA、WATANABE KEI-ICHI、YOSHIDA KEN-ICHI	4. 巻 248
2. 論文標題 NORMAL HILBERT COEFFICIENTS AND ELLIPTIC IDEALS IN NORMAL TWO-DIMENSIONAL SINGULARITIES	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 779 ~ 800
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj.2022.5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Trivedi Vijaylaxmi、Watanabe Kei-Ichi	4. 巻 226
2. 論文標題 Hilbert-Kunz density function for graded domains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 106835 ~ 106835
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2021.106835	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Puthenpurakal Tony J.、Watanabe Kei-ichi、Yoshida Ken-ichi	4. 巻 571
2. 論文標題 The strong Rees property of powers of the maximal ideal and Takahashi-Dao's question	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 297 ~ 315
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2018.07.028	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Singh Anurag K., Takahashi Ryo, Watanabe Kei-ichi	4. 巻 571
2. 論文標題 Homogeneous prime elements in normal two-dimensional graded rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 339 ~ 349
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.07.012	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 V. Trivedi and K. Watanabe	4. 巻 567
2. 論文標題 Hilbert-Kunz density functions and F-thresholds,	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 533-563
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.09.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 A. Singh, R. Takahashi and K. Watanabe	4. 巻 571
2. 論文標題 Homogeneous prime elements in normal two-dimensional graded rings,	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 339-349
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.07.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Puthenpurakal, K. Watanabe, K. YOSHIDA	4. 巻 571
2. 論文標題 The strong Rees property of powers of the maximal ideal and Takahashi-Dao's question,	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 297-315
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.07.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計5件(うち招待講演 5件/うち国際学会 2件)

1. 発表者名 Kei-ichi Watanabe
2. 発表標題 Elliptic ideals in 2 dimensional normal local rings,
3. 学会等名 Commutative Algebra Seminar, University of Utah (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kei-ichi Watanabe
2. 発表標題 Inverse Polynomials of numerical semigroup rings
3. 学会等名 International Meeting on Numerical Semigroups, Roma, 2022, (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Keiichi Watanabe
2. 発表標題 Inverse polynomials of symmetric numerical semigroups
3. 学会等名 Virtual Commutative Algebra Seminar, IIT Bombay, (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kei-ichi Watanabe
2. 発表標題 Normal Hilbert coefficients and elliptic ideals in normal 2-dimensional local domains
3. 学会等名 Workshop, "Fellowship of the Ring", Mathematical Sciences Research Institute (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kei-ichi Watanabe
2. 発表標題 NORMAL HILBERT COEFFICIENTS AND ELLIPTIC IDEALS IN NORMAL 2-DIMENSIONAL LOCAL DOMAINS
3. 学会等名 OIST Workshop: Quantum Math, Singularities and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------