

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03527

研究課題名（和文）非可換アソシエーション・スキームとコヒアラント代数の既約分解とその応用

研究課題名（英文）Noncommutative association schemes, coherent algebras, their irreducible decompositions and applications

研究代表者

宗政 昭弘 (Akihiro, Munemasa)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：50219862

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：アソシエーション・スキームの代数的理論を応用して複素アダマール行列の構成問題やユークリッド空間における有限距離集合の分類問題など、組合せ論的問題および幾何学の問題に取り組んだ。またコヒアラント代数の既約分解のデザイン理論への応用として、ある組合せデザインが不等式により自然に特徴づけられることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

組合せ論的对象の存在問題と分類問題、特にアソシエーション・スキームの理論は、計算機科学においても重要な意味を持ち、代数的手法が有用であることは認知されてきている。特に、非可換アソシエーション・スキームの理論を応用上重要な面を優先的に整備することは学術的意義がある。

研究成果の概要（英文）：We applied the algebraic theory of association schemes to combinatorial or geometrical problems, such as the existence of complex Hadamard matrices, classification of distance sets in Euclidean spaces. We also established a characterization of certain combinatorial designs in terms of the natural inequality derived from the irreducible decomposition of a coherent algebra.

研究分野：数学

キーワード：有限群 アソシエーション・スキーム 指標表 固有値 グラフ アダマール行列 組合せデザイン

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

#### 1. 研究開始当初の背景

代数的符号理論・組合せデザイン理論に代数的方法を適用することは、Delsarte [2] によって 1973 年にアソシエーション・スキームという枠組みの中で定式化され、それまで知られていた多くの結果、特に限界式が統一的な方法で導かれることが示された。Delsarte は対称的なアソシエーション・スキームについてのみ代数的手法を開発したが、その後非対称的なアソシエーション・スキームや、さらに一般的な非可換アソシエーション・スキームについても理論が整備されつつある。

#### 2. 研究の目的

ジョンソン・アソシエーション・スキームの族は階層構造を持ち、対称的なアソシエーション・スキームを集めることで非可換アソシエーション・スキームの一般化であるコヒアラント配置ができています。これまでは一つの階層である対称的なアソシエーション・スキームに代数的理論を構築していたが、複数の階層について理論を構築することで、組合せデザイン理論への新しい応用を考えることが目的である。また、アソシエーション・スキームの指標表を利用して存在問題にアプローチが可能な複素アダマール行列の存在問題や、ユークリッド空間の距離集合の分類問題も同時に取り組む。

#### 3. 研究の方法

非可換アソシエーション・スキームの応用としてデザインの存在問題に挑戦した。すでいくつかの実験的な例については、行列の半正定値性から興味深い不等式が得られることがわかっており、これらの成果を統合して、応用対象の拡大を目指した。特に、quasi-symmetric なデザインの存在問題について、表現論を活用すると同時に計算機実験を行い、アダマール行列から構成を試みた。また、テイラーグラフの有向グラフでの類似について、そのスイッチングの意味をアソシエーション・スキームのデータベースを用いて探究した。得られた研究成果を研究集会で発表し、専門家から有益な助言を受けた。

#### 4. 研究成果

アソシエーション・スキームの隣接代数に属する複素アダマール行列については、これまで多くの研究を行ってきたが、複素アダマール行列のコアがアソシエーション・スキームの隣接代数に属しているようなものについて、指標表の理論を用いて研究を進めた。このような構成法は、コンファレンス・グラフの隣接行列から得られるコンファレンス行列の構成にヒントを得て、Szollosi 氏が学位論文において複素アダマール行列の場合に一般化している。本研究では研究代表者と研究分担者である生田氏が協力して一般のクラス 2 の対称アソシエーション・スキーム、つまり強正則グラフに対して、複素アダマール行列のコアがその隣接代数に含まれるようなものを完全に分類した。この分類のためには、多項式の零点の個数と評価を精密に行う必要があり、個数の評価にはスツルムの定理を用いた。この研究成果は 2020 年に研究代表者と研究分担者である生田氏の共著論文として発表した。また、2020 年はすべての研究集会在オンラインで開催されることになり、国内会議 JCCA およびロシア主催の国際会議で発表を行った。研究代表者と研究分担者である生田氏が協力してテイラーグラフの有向グラフへの類似に取り組んだが、この研究成果を発表を行った際に先行研究があることが判明し、未解決問題の洗い出しをすることになった。実際、アソシエーション・スキームとアダマール行列について、これまで多くの研究を行ってきたが、最も古典的な関係である、非対称的なクラス 2 のアソシエーション・スキームと歪アダマール行列の関係について、スイッチングの概念を使ってより詳しい説明ができるのではないかという動機を元に実験的な考察を始めた。非対称的なクラス 2 のアソシエーション・スキームにはダブリングと呼ばれる構成法があるが、この構成法とスイッチングクラスとの関係を明らかにした。この研究は分担者の生田氏と行った。

また符号とデザインの関係で特に未解決である場合に、格子の影の概念を適用してある現象を説明できることを発見し、デザイン理論研究集会で口頭発表を行った。これまで、散在型有限単純群との関係で研究されてきた長さ12, 24の場合を超えて、次に興味深い現象が起こっていると考えられる長さ36の3元自己双対符号とアダマール行列について実験的な研究を開始し、研究の中間報告を行った。またコヒアラント代数の既約分解のデザイン理論への応用は独自に進めていて、これまで得られた semiplane を特徴づける不等式について国際会議で口頭発表を行った。

研究分担者の野崎氏はユークリッド空間内の有限部分集合で距離の種類に制限をつけた上での極大なものの分類に取り組んできた。距離の種類が1のときは、正単体のことであるが、正単体にさらに点を付け加えて得られる、距離の種類が2である極大な集合の分類を行った。この研究成果は滋賀大学の篠原氏との共著論文として発表した。特に、正12面体の距離集合として特徴づけるという、長年の未解決問題を解決した。また、この問題のアソシエーション・スキームでの類似を、標数が素数の体で考えて新たな上界を得る方法を導出した。さらに、研究分担者の野崎氏はユークリッド空間内の有限部分集合で、距離の値をある代数体の整数環の剰余環の元として捉えた場合に、個数に制限をつけた場合の上界を求めた。また、代数的グラフ理論における中心的な概念である固有値の分布とグラフの構造の関係について、既存の研究成果をハイパーグラフに一般化した。この研究成果はエクspanダーグラフへの代数的グラフ理論の応用を、ハイパーグラフの極値集合論という設定に一般化したものと位置付けられる。

## 参考文献

- [1] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Research Reports Suppl. **10** (1973).

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 野崎寛	4. 巻 -
2. 論文標題 Bounds for sets with few distances distinct modulo a prime ideal	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 第38回代数的組合せ論シンポジウム	6. 最初と最後の頁 1~7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Boyvalenkov Peter、Nozaki Hiroshi、Safaei Navid	4. 巻 646
2. 論文標題 Rationality of the inner products of spherical s-distance t-designs for $t \geq 2s-1$ , $s \geq 3$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 107 ~ 118
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2022.03.028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Cioaba Sebastian M.、Koolen Jack H.、Mimura Masato、Nozaki Hiroshi、Okuda Takayuki	4. 巻 104
2. 論文標題 On the spectrum and linear programming bound for hypergraphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103535 ~ 103535
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2022.103535	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Gavrilyuk Alexander L.、Munemasa Akihiro	4. 巻 658
2. 論文標題 Maximal digraphs whose Hermitian spectral radius is at most 2	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 331 ~ 349
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2022.11.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Munemasa Akihiro, Tonchev Vladimir D.	4. 巻 33
2. 論文標題 Quasi-symmetric 2-(41,9,9) designs and doubly even self-dual codes of length 40	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing	6. 最初と最後の頁 855 ~ 866
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00200-022-00543-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hiroshi Nozaki, Masashi Shinohara	4. 巻 37
2. 論文標題 A proof of a dodecahedron conjecture for distance sets	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1585-1603
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02318-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sho Suda	4. 巻 643
2. 論文標題 Q-polynomial coherent configurations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 166-195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2022.02.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Alexander L. Gavriilyuk, Akihiro Munemasa, Yoshio Sano and Tetsuji Taniguchi	4. 巻 98
2. 論文標題 Signed analogue of line graphs and their smallest eigenvalues	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Graph Theory	6. 最初と最後の頁 309-325
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/jgt.22699	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tsuyoshi Miezaki, Akihiro Munemasa and Hiroyuki Nakasora	4. 巻 89
2. 論文標題 A note on Assmus--Mattson type theorems	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Designs, Codes and Cryptogr.	6. 最初と最後の頁 843-858
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10623-021-00848-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Meng-Yue Cao, Jack H. Koolen, Akihiro Munemasa and Kiyoto Yoshino	4. 巻 37
2. 論文標題 Maximality of Seidel matrices and switching roots of graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1491-1507
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02359-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takuya Ikuta and Akihiro Munemasa	4. 巻 27
2. 論文標題 Bordered complex Hadamard matrices and strongly regular graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Interdisciplinary Information Sciences	6. 最初と最後の頁 41-56
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4036/iis.2020.R.03	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takuya Ikuta, Akihiro Munemasa	4. 巻 26
2. 論文標題 Bordered complex Hadamard matrices and strongly regular graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Interdisciplinary Information Sciences	6. 最初と最後の頁 1-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4036/iis.2020.R.03	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Nozaki, Masashi Shinohara	4. 巻 343
2. 論文標題 Maximal 2-distance sets containing the regular simplex	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2020.112071	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 11件)

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Weakly distance-regular circulants
3. 学会等名 The 8th Workshop on Algebraic Graph Theory and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Sphere packings, root systems and signed graphs
3. 学会等名 Combinatorics Today Series (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Association schemes and spin models
3. 学会等名 Graph Theory, Algebraic Combinatorics and Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Quasi-symmetric 2-(41,9,9) designs
3. 学会等名 第38回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Quasi-symmetric 2-(41,9,9) designs and doubly even self-dual codes of length 40
3. 学会等名 Hadamard 2020+2 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 On the shadows of the even unimodular lattices constructed from ternary self-dual codes
3. 学会等名 直交デザインと関連する組合せ論
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 生田卓也
2. 発表標題 Extended double covers of non-symmetric association schemes of class 2
3. 学会等名 直交デザインと関連する組合せ論
4. 発表年 2023年



1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Semiplanes and an inequality for incidence structures
3. 学会等名 Workshop on Algebraic Combinatorics, Online (zoom) organized by National Taiwan University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Extended double covers of non-symmetric association schemes of class 2
3. 学会等名 The 6th Workshop on Algebraic Graph Theory and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Hermitian adjacency matrices of digraphs and root lattices over the Gaussian integers
3. 学会等名 Algebraic Graph Theory and Quantum Information (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 A generalization of mod-p bounds for s-distance sets to a ring of integers
3. 学会等名 Workshop on Algebraic Combinatorics, Online (zoom) organized by National Taiwan University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 Few-distance sets and the Dodecahedron conjecture
3. 学会等名 Extremal problems of discrete geometry Online (zoom) organized by Moscow Institute of Physics and Technology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 Linear programming bounds on the order of a regular graph given eigenvalues or girth -regular graphs with large girth-
3. 学会等名 A number theoretic approach for Post-Quantum Cryptography related to Ramanujan graphs, Online (zoom) organized by Kyushu University (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 Note on s-distance sets in the pseudo Euclidean space $R^{p,q}$
3. 学会等名 名古屋組合せ論セミナー, Online (zoom), 愛知県立大学
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 The regular two-graph on 276 vertices revisited
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 The regular two-graph on 276 vertices revisited
3. 学会等名 The Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Neighbor-balanced bijections of hypercubes
3. 学会等名 The 4-th Workshop on Algebraic Graph Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Ikuta Takuya, Akihiro Munemasa (分担執筆)	4. 発行年 2023年
2. 出版社 Cambridge University Press	5. 総ページ数 375
3. 書名 Algebraic Combinatorics and the Monster Group	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	須田 庄  (Suda Sho)  (30710206)	防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、 電気情報学群及びシステム工学群)・総合教育学群・准教授   (82723)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	野崎 寛  (Nozaki Hiroshi)  (80632778)	愛知教育大学・教育学部・准教授    (13902)	
研究分担者	生田 卓也  (Ikuta Takuya)  (70271111)	神戸学院大学・法学部・教授    (34509)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関