

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03535

研究課題名（和文）整閉包の理論の新展開と局所環論への応用

研究課題名（英文）New development of theory of integral closure and its applications to local rings

研究代表者

早坂 太（Hayasaka, Futoshi）

岡山大学・環境生命自然科学学域・教授

研究者番号：20409460

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：2次元正則局所環上の直既約整閉加群の存在および付随する行列式イデアルに関する研究を行った。整閉単項式イデアルに付随する直既約整閉加群の構成法を得て、任意階数の直既約整閉加群を具体的かつ大量に与えることに成功した。さらに階数2および階数3の場合に、直既約整閉加群の行列式イデアルとして現れる整閉イデアルの特徴付けを得て、付随するイデアルの多様性を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

古典的な整閉イデアルの理論を高階数化した2次元正則局所環上の整閉加群の理論では、直既約整閉加群がどれくらい存在するか？という問いが理論の非自明性を示す上で重要である。得られた成果は、直既約整閉加群とそれに付随する行列式イデアルが予想より大量かつ多様に存在することを示すもので、理論の非自明性を強化するばかりでなく、整閉加群の分類可能性を示唆するものである。

研究成果の概要（英文）：We studied the existence of indecomposable integrally closed modules over two-dimensional regular local rings and the associated determinantal ideals. We obtained a method for constructing indecomposable integrally closed modules associated with integrally closed monomial ideals, and gave a large class of indecomposable integrally closed modules of arbitrary rank. Furthermore, we obtained a characterization of integrally closed ideals which arise as the determinantal ideals of indecomposable integrally closed modules of rank 2 and 3.

研究分野：可換環論

キーワード：整閉イデアル 2次元正則局所環 整閉加群 直既約加群 行列式イデアル

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

1930年代に Zariski が展開した 2次元正則局所環の整閉イデアルの理論は、Lipman によって 2次元有理特異点上の理論に拡張された。「高次元化」の研究は、ヒルベルト関数や Rees 環との関連の中で推進されている。近年は、「高階数化」の研究が新展開され、その応用研究も活発化している。加えて、本研究を実施する背景には、次の 2つの予備的研究成果がある。

(1) 1つは「高次元化」に関するもので、正則局所環の整閉イデアルの多重 Rees 環が正規となるための十分条件 (=Rees 環の整閉包の Cohen-Macaulay 性と低次斉次成分の整閉性) が得られている。これは、2次元の場合の定理を高次元化・多重化したとみなせるもので、新たな高次元化の方向を示唆するものである。

(2) もう1つは「高階数化」に関するもので、2次元正則局所環上の階数 2 の直既約整閉加群を具体的かつ大量に構成する方法を得ている。これは、未解決だった「Kodiyalam の問い」に、体系的反例のクラスを与えただけでなく、階数 2 の直既約整閉加群が、予想よりもはるかに多く存在することを初めて明らかにしたものである。

このような背景と予備的研究成果から、古典的な整閉イデアルの理論の背後には、これを高階数化・高次元化する理論が存在するのではないかと考えられる。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、整閉イデアルの理論を「高次元化・高階数化」し、新たな局所環論を展開することにある。与えられた局所環の整閉イデアル・整閉加群の挙動を詳しく解析することで、局所環の環構造や付随する Rees 環、ブックスバウム・リム重複度との関係を解明したい。具体的には次の 3つの課題に取り組む。

(1) 整閉イデアルの挙動と Rees 環の局所コホモロジー加群の研究：イデアルの正規性と付随する Rees 環の環構造の間には密接な関係がある。Rees 環の局所コホモロジー加群の斉次成分の消滅を「節減」を用いて詳しく解析することで、これまでの結果を大幅に一般化することに成功している。この成功の鍵は、古典的ネーター正規化定理を改良した点にある。本課題では、この予備的研究成果を手掛かりに、整閉イデアルの漸近挙動と Rees 環の局所コホモロジー加群の間関係を精密化することで、正則局所環の整閉イデアルの挙動が 2次元と 3次元以上の場合で異なる理由の新たな側面を明らかにする。

(2) 正規局所整域上の整閉加群と Rees 環の環構造研究：Lipman-Tessier は 2次元有理特異点上で「整閉イデアル」の理論を展開し、Zariski の定理を拡張した。一方、Kodiyalam は 2次元正則局所環上で「整閉加群」の理論を展開し、Zariski の定理を「高階数化」した。近年、この「高階数化」の研究が活発化している。中でも Lipman-Tessier の理論の高階数化が期待されていて、いくつかのアイデアが報告されているものの、未解決のままである。本課題では、Kodiyalam が展開した整閉加群の理論を、正則という仮定を弱める方向への拡張を目指す。この目的のため、イデアルの「正規化されたヒルベルト係数の理論」を手掛かりに、「加群の重複度の基礎理論」を用いて、任意標数の局所環上で「正規化されたブックスバウム・リム係数の理論」を展開する。

(3) 直既約整閉加群の遍在性の解明と具体的構成：「高階数化」の研究では「直既約整閉加群がどれくらい存在するか？」という問いが理論の非自明性を示す上で重要である。これまでの研究で、2次元正則局所環の単項式イデアルに付随する階数 2 の直既約整閉加群を具体的に構成し、懸案だった「Kodiyalam の問い」を否定的に解決した。構成法は、Zariski の一意分解定理を用いるもので、任意階数への拡張が期待される。本課題では、この構成法を手掛かりに、任意階数の直既約整閉加群の具体的構成を目指す。計算機を使った具体的な計算実験を積み重ねることで、与えられた整閉加群が直既約かどうか判定する数値的・幾何的条件を導出したい。そして、直既約整閉加群の遍在性とその背後にある一般論を解明する。

### 3. 研究の方法

(1) 整閉整域のイデアルの Rees 環の整閉包は、イデアル冪の整閉包の情報をすべて含む次数付き環である。上記(1)の課題では、この次数付き環の局所コホモロジー加群の解明が鍵となる。予備的研究で得られている節減理論を使って、局所コホモロジーの斉次成分を精密に記述する。そして、正則局所環のイデアルが正規となるための必要十分条件を明らかにする。

(2) 任意標数 2次元正規局所整域のイデアルの Rees 環の整閉包の Cohen-Macaulay 性は「正規化されたヒルベルト係数」を使って特徴付けられることが知られている。これは、Lipman-Tessier

の定理の任意標数版を導くもので、上記(2)の課題解決への手掛かりとなる。本課題では「正規化されたブックスバウム・リム係数」の基礎理論を構築し、これを2次元擬有理特異点の場合に応用することで、イデアルの場合の類似が成り立つことを明らかにする。

(3) これまでの予備的研究で、2次元正則局所環の整閉単項式イデアルに付随する階数2の直既約整閉加群を具体的に構成する方法が得られている。上記(3)の課題では、この構成法を手掛かりに、階数3以上の直既約整閉加群を具体的に構成する。加群のグレブナー基底やブックスバウム・リム重複度の理論を利用して、直既約性の判定に有効な計算法を開発したい。そして、直既約整閉加群の遍在性が任意階数で成立することを明らかにする。

#### 4. 研究成果

(1) 整閉単項式イデアルに付随する直既約整閉加群の構成：予備的研究で得られていた2次元正則局所環の整閉単項式イデアルに付随する階数2の直既約整閉加群の具体的な構成を一般化し、階数任意で直既約整閉加群の具体的な構成法を与えた。これにより、2次元正則局所環上の直既約整閉加群は、任意階数において予想よりもはるかに多様に存在することがわかった。これは、Kodiyalamが展開した整閉加群の理論の非自明性を強化するとともに、単項式イデアルとは限らない整閉イデアルに付随する直既約整閉加群の遍在性を示すものである。この結果は論文としてまとめ、Journal of Pure and Applied Algebraに発表した。

(2) 階数2の直既約整閉加群の行列式イデアルとして現れる整閉イデアルの特徴付け：単項式イデアルとは限らない整閉イデアルに付随する階数2の直既約整閉加群の構成法を与え、予備的研究で得られていた単項式イデアルの場合の結果を拡張した。さらに、階数2の直既約整閉加群の行列式イデアルになり得ない整閉イデアルのクラスを見出し、最終的にそのような整閉イデアルの完全な特徴付けを与えることに成功した。この結果はKodiyalamとの共著論文としてまとめ、Journal of Commutative Algebraに発表した。

(3) 階数3の直既約整閉加群の行列式イデアルとして現れる整閉イデアルの特徴付け：研究成果(2)のアイデアを推し進め、単項式イデアルとは限らない整閉イデアルに付随する階数任意の直既約整閉加群の構成法を与えた。これは、単項式イデアルの場合の研究成果(1)の結果を大幅に拡張したものである。さらに、階数2の場合の成果(2)の非存在に関する結果も階数任意の場合まで拡張することに成功した。これにより、階数3の直既約整閉加群の行列式イデアルとして現れる整閉イデアルの特徴付けを得た。この結果はKodiyalamとの共著論文としてまとめ、Journal of Pure and Applied Algebraに発表した。

(4) 整閉加群に付随する行列式イデアルのcolengthに関する不等式：2次元正則局所環上の加群のブックスバウム・リム重複度と付随するイデアルの随伴イデアルのcolengthに関する不等式を導出した。さらに、その等号成立条件を与え、整閉加群がみたす等式を得た。この等式は整閉イデアルの場合によく知られた重複度公式を導くばかりでなく、イデアルの混合重複度公式をも導くもので、さらには、Kodiyalam-Mohanによって証明された「整閉加群の長さ・重複度公式」が直接の系として得られる。この結果はKodiyalamとの共同研究として論文にまとめた。これから専門誌に投稿・審査を受けて発表予定である。

(5) 階数4の直既約整閉加群の研究：研究成果(2)(3)で得られた階数2,3の場合の結果を手掛かりに、階数4の直既約整閉加群の行列式イデアルとして現れる整閉イデアルの特徴付けに取り組んだ。階数4以上の場合、階数3までの場合と異なり、階数2以上の直和因子が存在する可能性がある。これが階数4以上の場合の研究を困難にしている。このような可能性がある非自明な場合として、位数2の単純整閉イデアル二つの積の形をした位数4の整閉イデアルに付随する階数4の直既約整閉加群の存在について考察した。単項式イデアルの場合に具体的計算を重ね、位数4の単項式イデアルで、階数4の直既約整閉加群の行列式イデアルになり得ない非自明なイデアルのクラスを見出した。この例の計算過程で、階数と位数が等しい整閉加群の分類可能性を予見し、この方向の研究に着手した。

(6) イデアル冪の素因子の挙動について：イデアル冪の整閉包の素因子の挙動は単調増加かつ漸近安定であることがよく知られている。一方、通常冪の素因子の挙動は漸近安定であるが、冪が小さい部分では単調とは限らない。1983年、Ratliffは通常冪の素因子は一般には制御不可能で、いくらでも複雑な挙動を示すイデアルの存在を洞察し問題として提出した。この問題に対する部分的解答となる例を今村との共同研究で構成した。この結果は今村との共著論文としてまとめ、専門誌に投稿・審査中である。Ratliffの問題は最近、Ha-Nguyen-Trung-Trungによって肯定的に解決されたものの、今回構成した例は、Krull次元が小さい整域でも冪の素因子が複雑な挙動を示すイデアルが存在する可能性があることを示唆するものである。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hayasaka Futoshi, Kodiyalam Vijay	4. 巻 228
2. 論文標題 Indecomposable integrally closed modules of rank 3 over two-dimensional regular local rings	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 107612 ~ 107612
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2024.107612	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hayasaka Futoshi, Kodiyalam Vijay	4. 巻 15
2. 論文標題 Note on indecomposable integrally closed modules of rank 2 over two-dimensional regular local rings	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 513--518
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1216/jca.2023.15.513	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hayasaka Futoshi	4. 巻 226
2. 論文標題 Indecomposable integrally closed modules of arbitrary rank over a two-dimensional regular local ring	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 107026 ~ 107026
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2022.107026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hayasaka Futoshi	4. 巻 556
2. 論文標題 Constructing indecomposable integrally closed modules over a two-dimensional regular local ring	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 879 ~ 907
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.03.029	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 早坂太
2. 発表標題 2次元正則局所環上の整閉加群の分類に向けて
3. 学会等名 第2回札幌可換環論セミナー
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 早坂太
2. 発表標題 On a question of Ratliff on the associated primes of powers of an ideal
3. 学会等名 OCAMI可換環論・不変式論セミナーIII（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 早坂太・今村青斗
2. 発表標題 An example to a question of Ratliff on asymptotic prime divisors
3. 学会等名 第44回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 早坂太
2. 発表標題 直既約整閉加群に付随する行列式イデアルについて
3. 学会等名 岡山可換代数表現セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Futoshi Hayasaka
2. 発表標題 Ideals of indecomposable integrally closed modules over two-dimensional regular local rings
3. 学会等名 The 11th Japan-Vietnam Joint seminar on Commutative Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 早坂太
2. 発表標題 2次元正則局所環上の階数2の直既約整閉加群
3. 学会等名 第33回可換環論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 早坂太
2. 発表標題 2次元正則局所環上の直既約整閉加群について
3. 学会等名 特異点セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 早坂太
2. 発表標題 On ideals of indecomposable integrally closed modules over two-dimensional regular local rings
3. 学会等名 第43回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 早坂太
2. 発表標題 A note on the Buchsbaum-Rim multiplicity of modules over a two-dimensional regular local ring
3. 学会等名 第42回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 早坂太
2. 発表標題 単項式イデアルに付随する高階数直既約整閉加群
3. 学会等名 可換環論オンラインワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関