

令和 5 年 5 月 29 日現在

機関番号：17104

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03536

研究課題名(和文) 局所体上の曲線の類体論における類群の研究

研究課題名(英文) Study of the class group in the class field theory for curves over local fields

研究代表者

平之内 俊郎 (Hiranouchi, Toshiro)

九州工業大学・大学院工学研究院・准教授

研究者番号：30532551

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は p 進体上の曲線の類体論における(古典的なイデアル類群の類似である)「類群」にあたるある有限生成 Abel 群の有限部分を具体的に計算する、というものであった。本研究において、とくに p 進体上で良い還元を持つ Abel 多様体と乗法群に付随する Milnor 型 K 群、いわゆる「染川 K 群」の構造を調べることにより、曲線に付随する「類群」の Abel 群としての群構造やその位数の上限・下限を与えることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今回の研究対象である p 進体上の曲線の類体論は、もともと高次元の多様体に対する類体論(いわゆる高次元類体論)を証明する過程で生まれた理論である。これまでではどちらかと言えばその理論的側面の研究に主眼が置かれていたように思われる。しかし、今回の研究で具体的な曲線に対してより具体的に計算を行うことができた。その結果、古典的な類体論と同じように岩澤理論のような他の分野への応用・発展にも貢献するものと考えられる。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this study was to explicitly compute the finite part of the "class group" which is a finitely generated abelian group (analogous to the classical ideal class group) in the context of the class field theory of curves over p -adic fields. In this study, by studying the structure of the Milnor type K -group, the so-called "Somekawa K -group," associated with Abelian varieties with good reduction and the multiplicative groups, we were able to provide the Abelian group structure of the "class group" associated with a curve and the upper and lower bounds of the order of the group.

研究分野：数論幾何学

キーワード：類体論 楕円曲線 イデアル類群

1. 研究開始当初の背景

局所体上の曲線に対する類体論は、S. Bloch が高次元類体論への応用を鑑みてはじめたものであり、S. Saito がより一般的な(良還元を持つとは限らない)曲線に拡張した。ここで類体論の主結果をもう少し詳しく述べる: X を p 進体上のある曲線とする。このとき X の基本群の最大 Abel 商が $SK_1(X)$ というあるアーベル群で近似される、というものである。古典的な類体論において「Galois 群」を近似する「類群」(いわゆるイデアル類群)を調べるとい問題は、応用という側面からだけでなく、その研究が整数論に及ぼしてきた影響を見ても、重要であると言える。こうした観点から、本研究の研究対象である「類群」 $SK_1(X)$ を調べることは、それ自身興味深い問題であると言える。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上で述べたように p 進体上の曲線 X の類体論における「類群」 $SK_1(X)$ を計算するということである。しかしながら、これまではこうした群を具体的に計算するという研究はそれほど行われていなかったようである。この群は Jacobi 多様体の Tate 加群のある商を用いて表すことができることはよく知られている。ここでは、より詳しくこの群の位数や群構造を調べたい。またこの $SK_1(X)$ という群は高次 Chow 群を用いて表すこともできる。このことから本研究は高次 Chow 群を調べるという代数幾何学的問題であるとも見做すことができる。

3. 研究の方法

上記の類群 $SK_1(X)$ を直接計算することは困難である。ここでは、乗法群 X の Jacobi 多様体に対する染川 K 群と呼ばれる、Milnor K 群の類似にあたる群を用いる。さらに X の Jacobi 多様体の還元型によって問題を分けて考察する。

(1) 乗法的還元を持つ場合。T. Yamazaki によりふたつの Jacobi 多様体に付随する染川 K 群の研究がある。これと同じような議論で問題となっている乗法群と Jacobi 多様体に付随する染川 K 群も計算できる。

(2) 良通常 (good ordinary) 還元を持つ場合。この場合、類群の p -Sylow 部分群を決定する部分が本質的である。この部分は Galois 記号写像を用いて Galois コホモロジーの中での像の計算を行う。

(3) 良超特異 (good supersingular) 還元を持つ場合。 X が楕円曲線でありさらに良超特異還元を持つ場合を考える。この場合は Jacobi 多様体が楕円曲線そのものであり、以前の研究成果である楕円曲線の形式群に付随する filtration の計算を用いてこの群の取り得る範囲を評価する。

4. 研究成果

主な研究成果は以下の通りである。

(1) 研究計画のとおり p 進体上の曲線 X に対してそのヤコビ多様体が良通常 (good ordinary) 還元を持つ場合に(適当な仮定のもとで) X の「類群」 $SK_1(X)$ の構造を決定した。この論文(Galois symbol maps for abelian varieties over a p -adic fields) を完成させ、Acta Arithmetica から出版された。

(2) 研究計画のとおりバージニア大学 E. Gazaki 氏との共同研究を行い、 p 進体上のふたつ以上の楕円曲線に付随する染川 K 群の研究を行った。本研究では(たかだかひとつの)楕円曲線が良超特異 (good supersingular) 還元を持つ場合を考察している。とくに基礎体が有理 p 進体上不分岐である場合に、この群は p 加除的 (p -divisible) であることが分かった。応用として同じ基礎体に於いて楕円曲線の積に対する Chow 群の構造を調べることができた。またこうした局所的な結果を用いて代数体上の楕円曲線の積に対する Chow 群の構造についての考察を行った。以上の結果を Gazaki 氏との共著論文 (Divisibility results for zero-cycles) としてまとめ、Eur. J. Math から出版された。

(3)(2) とは別にバージニア大学 E. Gazaki 氏との共同研究を行い, p 進体上で良い還元 (good reduction) を持つアーベル多様体と乗法群に付随する染川 K 群の計算を行った. 特にアーベル多様体が通常良還元 (ordinary good reduction) を持つ場合には, その群構造についても詳しく調べることが出来た. これは上記 (1) の仮定をゆるめた場合の考察および, 通常還元でない楕円曲線の場合も考えて「類群」の群構造を調べたものである. この研究結果と局所体上の曲線の類体論を用いることで, 曲線の (アーベル) 基本群の幾何的部分に関する応用も得られた. Gazaki 氏と共著論文 (Abelian geometric fundamental groups for curves over a p -adic field) を作成し, J. Theor. Nombres Bordeaux に受理された.

(4) 群馬大学大下氏との共同研究により, 有理数体上の楕円曲線の p 冪ねじれ点のなす群から定まるイデアル類群の (ある商) の漸近挙動と精 Selmer 群の定める円分岩澤加群の関係に関する論文 (Asymptotic behavior of class groups and cyclotomic Iwasawa theory of elliptic curves) を執筆した. こちらも J. Theor. Nombres Bordeaux に受理された.

(5) 上記「研究の方法」(1) 乗法的還元を持つ場合, で述べた手法を用いて, p 進体上の曲線の積 X に対して, 各曲線のヤコビ多様体が良通常還元を持つ場合に X の Albanese 核の構造を決定し, この結果を論文としてまとめた. この結果は定理として既に知られていたものではあるが証明が従来のものとは異なっているため, 学内紀要に投稿し出版した.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Evangelia Gazaki, Toshiro Hiranouchi	4. 巻 -
2. 論文標題 Abelian geometric fundamental groups for curves over a p-adic field	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Theor. Nombres Bordeaux	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Toshiro Hiranouchi, Tatsuya Ohshita	4. 巻 -
2. 論文標題 Asymptotic behavior of class groups and cyclotomic Iwasawa theory of elliptic curves	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Theor. Nombres Bordeaux	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiro Hiranouchi	4. 巻 70
2. 論文標題 Bounds for the K-groups associated to abelian varieties over a p-adic field	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 25--32
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18997/00009111	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Evangelia Gazaki, Toshiro Hiranouchi	4. 巻 7
2. 論文標題 Divisibility results for zero-cycles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Eur. J. Math.	6. 最初と最後の頁 1458--1501
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-021-00471-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Toshiro Hiranouchi	4. 巻 69
2. 論文標題 Galois Symbol Map for A Tate Curve	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 1--6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.18997/00008772	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hiranouchi Toshiro	4. 巻 197
2. 論文標題 Galois symbol maps for abelian varieties over a p -adic field	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Acta Arithmetica	6. 最初と最後の頁 137--157
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/aa191129-11-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiro Hiranouchi	4. 巻 68
2. 論文標題 Albanese kernel of the product of curves over a p -adic field	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 1--7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.18997/00008063	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 平之内俊郎
2. 発表標題 Asymptotic behavior of class groups and cyclotomic Iwasawa theory of elliptic curves
3. 学会等名 日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 平之内俊郎
2. 発表標題 Ramified part of the geometric fundamental groups for curves over a p-adic field
3. 学会等名 日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 平之内俊郎
2. 発表標題 Divisibility results for zero-cycles over a p-adic field
3. 学会等名 日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 平之内俊郎
2. 発表標題 Divisibility results for zero-cycles over a p-adic field
3. 学会等名 九州代数的整数論集会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	バージニア大学			