

令和 6 年 5 月 5 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03538

研究課題名（和文）アフィン空間の間の様々なエタール射の族を調べることによるヤコビアン予想の研究

研究課題名（英文）Study of the Jacobian conjecture analyzing various families of etale morphisms between affine spaces

研究代表者

橋本 光靖（Hashimoto, Mitsuyasu）

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10208465

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：可換環論および代数幾何学における重要な問題であるヤコビアン予想について、正標数の可換環論の立場から解決を試みた。与えられた tame なアフィン空間からそれ自身へのエタール射に対して、新しい変数を追加した多項式環を考え、その部分環について環論的性質を論じた。その結果、エタール射から派生して得られるとある可換環について、その環が split F-regular になることが分かった。Split F-regularity については、最近 Datta らによって研究が進んでいるところであり、ひとつの足がかりが得られたと考えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ヤコビアン予想はアメリカ数学会の Mathematics Subject Classification において、独自の分類番号を持っているくらいに重要性の高い代数幾何学および可換環論における未解決問題であり、解決できた場合のインパクトは計り知れない。今回の研究において、正標数の可換環論を用いたアプローチにより、この問題を解決するのに何が分かれば良いかが分かったといえる。

研究成果の概要（英文）：The study was to solve the Jacobian Conjecture, which is an important problem in commutative algebra and algebraic geometry from the viewpoint of commutative algebra in positive characteristic. Given a tame etale endomorphism of affine spaces, we consider a polynomial ring with a new variable, and discussed the ring theoretic properties of its subrings.

研究分野：可換環論

キーワード：エタール射 可換環論 多項式環

1. 研究開始当初の背景

(1) ヤコビアン予想は 1939 年に初めて O. H. Keller によって定式化された予想で、複素数体上の n 次元アフィン空間のエタールな自己 k 射は同型であろう、というものである。この 80 年以上の間、多くの数学者による努力にもかかわらず、いまだに未解決である。これまで、この問題に対してはアフィン代数幾何学の立場からのアプローチがなされてきた。

(2) 一方で、正標数のフロベニウス写像を用いた可換環論による特異点研究は、1960-80 年代にその萌芽がみられ、80 年代後半に Hochster と Huneke によって密着閉包の概念が得られ、1990 年代に渡辺敬一、原伸生、K. Smith らによって標数 0 の特異点論との関係が明確化することによって確立した。この方向での研究が進むにつれ、特異点を持つ可換環の D 加群と F 特異点論の関係も論じられるようになっていった。

2. 研究の目的

ヤコビアン予想とは、標数 0 の体上では、アフィン n 空間のエタールな自己射はを形式的にそのまま正標数の体上に置き換えて定式化すると、すぐに反例が見つかることになるが、関数体の拡大に順、つまり、ガロア閉包までの拡大次数が標数で割れない、という仮定をおくと、今のところは反例は知られておらず、これがヤコビアン予想の正標数版であるといえる。正標数への還元の手法によって元の標数 0 でのヤコビアン予想は、正標数でのこの形でのヤコビアン予想が正しければ正しいことが容易に示される。本研究では、正標数のフロベニウス写像を用いた F 特異点の手法を用いて正標数のヤコビアン予想を解決し、もって元の意味でのヤコビアン予想を解決しようというものであった。

3. 研究の方法

k が標数 $p > 0$ の代数閉体で $f: k[y_1, \dots, y_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$ が étale な k 代数準同型で、その商体の拡大が順、つまり、 $k(y_1, \dots, y_n)$ からこの拡大の Galois 閉包までの拡大次数が p で割れないとすると、 f が同型であることを示したい。そのために、新しい変数 s を用意し、 $B = k[s, sx_1, \dots, sx_n]$ を考え、 $A = B \otimes_{k[s]} k(s, y_1, \dots, y_n)$ を考える。 A の環論的性質を調べることによって f の性質を調べる。 A も B も positively graded rings であり、その扱いには局所環論 (の類似) や次数付き環独特の議論、代数幾何的な手法が通用しやすい。正標数の特異点論的な議論としては、 F -signature の不変式論的な振る舞いを調べることを小林史弥氏と共同で実行する。

4. 研究成果

有限群 G の作用による不変式環は擬鏡映を持たない状況でその一般化された F 符号が正である直既約加群は G の直既約射影加群によって分類され、その一般化された F 符号の値も記述することができるが、それを有限群スキームの場合に一般化する結果を小林史弥氏と共同で得、Journal of Pure and Applied Algebra 誌に発表した。また、3 で出て来た A について、split F -regular と呼ばれる性質をみることが分かった。Split F -regular ならば有限生成環になるのではないか、という期待が寄せられる。少なくとも、正標数版のヤコビアン予想が正しければ、 $A=B$ なので、有限生成であるとい

う主張は正しい。また、有限 F 表現型を持つという性質について、次数付き環が次数付き環の意味でそうであることと、その環を無縁イデアルで完備化して得られる完備局所環が局所環の意味でそうであることとの関係が問題となる。これについて、Y. Yang 氏と共同で、Positively graded な次数付き環の上の加群が直既約であることと、その加群を完備化して直既約であることが同値であることを証明し、有限 F 表現型の問題も同時に解決をした。この結果は Kyoto Journal of Mathematics 誌に投稿して、掲載が確定している。残念ながらヤコビアン予想の解決には至っていないが、これらの結果は解決への努力の過程で得られたものであり、ヤコビアン予想に関する今後の研究に資するものがあると期待している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Mitsuyasu Hashimoto and Fumiya Kobayashi	4. 巻 228
2. 論文標題 Generalized F-signatures of the rings of invariants of finite group schemes	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 Article 107610
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2024.107610	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Mitsuyasu Hashimoto
2. 発表標題 Frobenius pushforwards]{Asymptotic behaviors of the Frobenius pushforwards
3. 学会等名 Virtual Commutative Algebra Seminar（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 橋本 光靖
2. 発表標題 Etale endomorphisms of affine spaces
3. 学会等名 可換環論の新しい融合セミナー II
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 橋本 光靖
2. 発表標題 不変式環の標準加群と a 不変量
3. 学会等名 正標数の可換環論とその周辺 in 淡路島
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 橋本 光靖
2. 発表標題 多項式環のエタール自己準同型に付随する次数付き環
3. 学会等名 Commutative Algebra Day in Osaka 2024
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 橋本 光靖
2. 発表標題 FFRT property of the rings of invariants under the actions of finite groups
3. 学会等名 第44回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 橋本 光靖
2. 発表標題 有限群スキームの作用による不変式環の渡辺型定理と a 不変量,
3. 学会等名 OCAMI-CAIT seminar II
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 橋本 光靖
2. 発表標題 FFRT property of the ring of invariants under the action of a finite group
3. 学会等名 OCAMI-CAIT seminar I
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mitsuyasu Hashimoto
2. 発表標題 Frobnius Maps of the Rings of Invariants
3. 学会等名 Workshop on Commutative Algebra and Algebraic Geometry in Prime Characteristics (smr 3901) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------