様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　５ 月 １２ 日現在

機関番号：３３９１０
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ０３５４６

研究課題名（和文）三次元代数多様体の埋め込み特異点解消について

研究課題名（英文）On embedded resolution of singularities for three dimensional algebraic varieties

研究代表者
川ノ上　帆（Kawanoue, Hiraku）

中部大学・理工学部・准教授

研究者番号：５０４６７４４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：特異点解消は代数幾何学において大変重要な問題の一つであり，標数0の場合は広中平祐先生によって一般次元で存在することが示されている．しかし正標数の場合は未だ低次元の場合しか存在が知られていない．本研究者はこの問題を解決するためにIFPというアプローチを導入し，Purdue大学の松木謙二氏と共同で研究を推進している．本研究においては，未解決の3次元埋め込み特異点解消の解決を目標とした．特に本質的である単項型と呼ばれる場合の解析を進め，幾つかの場合に不変量の候補を与え遷移の様子を調べるなど部分的な結果を得た．また超平面配置や正標数の微分方程式といった近縁分野においても新しい成果を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
代表者が提案し推進しているIFPというアプローチを用いて3次元多様体の埋め込み特異点解消について解析した．幾つかの場合の解析が終わるなど部分的成果が得られた．IFPの一定の有効性が示された一方で，3次元抽象特異点解消(解決済)と3次元埋め込み特異点解消(未解決)の差が想像以上に大きいことも明らかになった．曲面の埋め込み特異点解消についてはこの間の研究でより良い理解を得られたと言える．近縁の問題についての幾つかの成果も意義がある．B_2型拡大カタラン配置に関する予想の解決はB_n型一般の場合に道を拓く結果である．また正標数の線形微分方程式の解の記述はかなり発展性のある話題であると感じている．

研究成果の概要（英文）：Resolution of singularities is one of the very important problems in algebraic geometry. Existence of resolution in characteristic zero was established by Hironaka in any dimension, while that in positive characteristic is known only for low dimensional cases. To settle this problem, I introduced the approach called IFP, and work on it jointly with Kenji Matsuki in Purdue university. The theme of this project is to establish the existence of embedded resolution of three dimensional varieties, which is still open. We analyzed so-called "monomial cases", which comes as the most essential case after some reduction argument, and obtained some partial results such as giving the invariants in some cases and observing the transitional behavior of them. We also have some results in the area related to the main topic of our project, such as the theory of hyperplane arrangement or the theory of differential equations in positive characteristic.

研究分野：代数幾何学

キーワード：特異点解消　IFP　代数幾何学

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究の主題は代数多様体の特異点解消である．代数多様体の点は，その点の近くで局所的にユークリッド空間のようにみなせるときに非特異であるといい，そうでないとき特異であると言う．例えば曲線なら尖点や自己交差を持つ点が特異点，接線を引ける点が非特異点である．特異点を持たない多様体を非特異多様体という．与えられた代数多様体に対して非特異多様体からの双有理固有射をその多様体の特異点解消と呼ぶ．非特異な代数多様体に対しては多くの幾何学的道具立てが機能するが，特異になった途端に振る舞いが制御しにくくなる．そこで，任意の代数多様体に対して特異点解消が存在するか否かを問う所謂特異点解消の問題は，代数幾何学において大変基本的かつ重要な問題と考えられている．

代数多様体は標数 0 の体上定義されるものと正標数の体上定義されるものに大別される．標数 0 の代数多様体に関しては 1964 年の廣中平祐先生の記念碑的な結果があり，任意次元の代数多様体が常に特異点解消を持つことが知られている．この定理はもはや代数幾何学における基盤の一つというべき有用性を誇っており,代数幾何学においては言うに及ばず,整数論や代数解析学,学習理論に至るまで幅広い応用がある．翻って正標数の場合は積年の未解決問題であり，特異点解消の存在については 3 次元まで，より精密な埋め込み特異点解消の存在については 2 次元までしか知られていない．なお，前者は Abhyankar 氏と Cossart 氏-Piltant 氏による結果であり，後者には Abhyankar 氏，廣中先生，Cossart 氏-Jannsen 氏-齋藤氏，Benito 氏-Villamayor 氏，川ノ上-松木氏など様々な証明が知られている．なおこの状況は現在も改善されておらず，正標数任意次元の特異点解消の問題は，解決を希求される重要問題と言える．

以上が本研究開始当初の背景である．

２．研究の目的

本研究においては正標数の特異点解消の問題のうち，専門家たちの間で次に解決するべき問題の筆頭と目されている 3 次元代数多様体の埋め込み特異点解消の問題に焦点を絞る．代表者は正標数特異点解消の問題の解決のために Idealistic Filtration Program（以下 IFP）というアプローチを提唱し Purdue 大学の松木謙二氏と共同で発展させている．曲面の場合の埋め込み特異点解消もこの IFP を用いて証明することができる。この知見を生かして未解決の 3 次元の場合に挑戦するというのが今回の計画であった．もちろん，特異点解消に関連する近縁の問題についても必要に応じて研究する。この意味で，IFP の中心的な道具である微分作用素に関する知見を生かせる問題（例えば超平面配置に関する問題や微分作用素の振る舞いに関する諸問題）も本研究の副次的な目的とした．この種の問題は特に期間を定めず主要目的に関する研究の空き時間に進めると言う予定であった．

以上が本研究の研究目的である．

３．研究の方法

上述の通り，代表者が正標数特異点解消の問題のために提唱し Purdue 大学の松木謙二氏と共同で発展させている IFP を発展させる形で研究を進めた．以下 IFP について少し詳しく述べる．

標数 0 の場合の特異点解消は埋め込み特異点解消を経由して示されるが，その証明における鍵は最大接触超曲面と呼ばれるある種の非特異局所超曲面の存在にある．最大接触超曲面を介して標数 0 の場合の埋め込み特異点解消は全空間の次元に関する帰納法という枠組みにおさまり，非常にすっきりとした証明が得られる．ところが正標数下ではこの最大接触超曲面が常に存在するとは限らないので一見同様の証明は望むべくもない．そこで標数冪の先頭項を持つ特定の元達からなる先頭生成系という概念を導入する．先頭生成系の元が定める局所超曲面は一般に非特異とは限らないが，微分作用素との関係という観点からはこれらは標数 0 における最大接触超曲面と類似の性質を持つ．そこで先頭生成系を最大接触超曲面の代替物として用いることで標数 0 の場合と類似の証明を与えようというのが IFP の基本的な着想である．

最大接触超曲面の重要な性質である非特異性が保証されてないため標数 0 とは事情の異なると

ころも多く，これらの点を克服できない限りこの着想は画餅と帰す．後述の単項型における様相の違いなどもこのような現象の一例である．しかし，アルゴリズムの根幹に関わる爆発の中心の非特異性や単位となる不変量の上半連続性については成立することが確認でき，この設定下の具体的なアルゴリズムを与えることができる．以上が IFP の基礎部分についての概説である．

さて，IFP を適用することによって，任意の標数かつ任意の次元において特異点解消が単項型と呼ばれる特殊な状況における特異点解消に帰着するというところまでは既に確立している．標数 0 の場合は一旦単項型になればその後は単純な組み合わせ論的議論によって特異点解消を構成することができる．しかし正標数の場合の状況は未だそこまで単純ではなく，更なる解析が必要となる．そこで研究の焦点を単項型の場合に絞り，この場合に特異点解消を与える構成的な不変量を発見し，その不変量から定まるアルゴリズムが特異点解消を与えることを示すという形での証明を目指す．

以上が本研究の研究方法である．

４．研究成果

当初の期待と異なり 3 次元多様体の埋め込み特異点解消は想像以上に難しく解決することはできなかった．幾つかの場合について不変量の候補を定義しその遷移の様子を解析するなどの部分的進展は得たが，発表できる形のものは得られなかった．周辺分野に関しては，超平面配置についてのある予想を解決したり，正標数の線形微分方程式の解を記述する結果を得たりして意外に実りの多い結末となった．周辺分野に関するこれら 2 つの成果は 2 編のプレプリントに纏めた．以下に上記の項目ごとに詳細を述べる．

まずは本命の 3 次元多様体の埋め込み特異点解消の解析について述べる．我々が現在扱っている単項型用の不変量は例外因子を良い因子と悪い因子に分けた上で，それらの配置に基づいて場合分けして定める．従って不変量がちゃんと機能するか否かを確かめるためにはそれぞれの配置における不変量が爆発による配置の遷移も込めて整合性を持って振る舞う様を解析する必要がある．この作業は曲面の場合は場合の総数が少なかったので比較的容易であったが，3 次元の場合はかなり複雑である．また Moh-Hauser の跳躍現象の発生状況も 3 次元の場合は何種類か登場し，これも順調な解析を妨げる要因となっている．代表者は松木氏との共著“Resolution of singularities of an idealistic filtration in dimension 3 after Benito-Villamayor”及び“A new strategy for resolution of singularities in the monomial case in positive characteristic”の 2 編の論文において曲面の場合の埋め込み特異点解消の 2 通りの証明を与えた．これらはいずれも IFP を用いるものであり因子の配置に基づいて場合分けする点も同様であるのだが，鍵となる観察が異なり，対応する不変量も微妙に異なる．いずれの方式が 3 次元の場合に適合するかについてかなり試行錯誤を重ねたが現時点ではまだ結論は出ていない．幾つかの配置については不変量を定義して期待できる振る舞いをすることを確かめている．全体の整合性を確認する必要があるので残念ながら未だ発表できる段階とは言えないが，実質的には一定の成果と言える．

次に近縁の問題として超平面配置における成果について述べる．Feigin 氏，Wang 氏および吉永氏はプレプリント arXiv:2309.10287 においてある種の重複配置たちの対数的ベクトル場の生成元を積分の形で具体的に記述する方法を与えた．またその手法で得られる生成元を変形することで B_2 型拡大カタラン配置の対数的ベクトル場の具体的な生成元の候補を予想した．代表者は計算代数システムによる実験を通じて様々な副次的な関係式を見出し，本研究で培った微分作用素の扱いと膨大な計算によってそれらを証明することにより彼らの予想が正しいことを確認した．この結果はプレプリント arXiv:2311.09045 に纏めてある．また 2024 年 2 月に大阪大学における研究集会で著者の一部の前で講演し，アイディアを直接説明した．現在の時点では一般の B_n 型拡大カタラン配置（n は 3 以上）については生成元の形はまだ予想がつかないが，発展の余地のある意味のある成果だと考える．

もう一つの近縁の問題が正標数における微分方程式の問題である．正標数の線形微分方程式は一般には冪級数解を持たないが，対数を k 回合成した関数に対応する変数 z_k (k=1,2,…)達を導入すると常に冪級数解を持つようになる．これは Dwork 氏や本田氏による理論をウィーン大学の Hauser 氏とその学生 Fürnsinn 氏が精密化した結果であり，Fuchs-Frobenius 理論の正標数版と見做すこともできる．そこで，例えば微分方程式 y’=y の解（指数関数！）をこのようにして構成したとき，この解の z_k 達に関する定数項は x の冪級数としてどのような性質を持つか，が自然な問題としてあらわれる．代表者はこの指数関数の具体的かつ再帰的な記述を与え，定数項が代数的な冪級数となることを証明した．この観察が突破口となり，Hauser 氏，Fürnsinn 氏との議論の末任意の階数 1 の線形微分方程式について解の定数項の代数性が示された．最終的

にはより精密に解の級数において有限個以外の z_k に 0 を代入すると常に代数的になることが証明できた. この結果はプレプリント arXiv:2401.14154 に纏められ, 現在雑誌に投稿中である. 大変発展性のある話題であり, 引き続き一般の階数の場合に取り組みたいと考えている.

以上が本研究の研究成果である.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　3件／うち国際学会　3件）

１．発表者名
Hiraku Kawanoue

２．発表標題
An exponential function in positive characteristic

３．学会等名
Algebraicity Problems in Geometry, Analysis and Number Theory（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名
川ノ上　帆

２．発表標題
A basis for the logarithmic vector field of the extended Catalan arrangement of type B_2

３．学会等名
湯布院代数幾何学ワークショップ（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
Hiraku Kawanoue

２．発表標題
Exponential in characteristic $p>0$

３．学会等名
Differential Equations in Zero and Positive Characteristic（国際学会）

４．発表年
2024年

１．発表者名
川ノ上　帆

２．発表標題
A basis for the logarithmic vector field of the extended Catalan arrangement of type B_2

３．学会等名
Multiarrangements of type B_2 and related topics（招待講演）

４．発表年
2024年

1．発表者名 Hiraku Kawanoue
2．発表標題 Freeness of arrangements of few lines Herwig Hauser
3．学会等名 Periods（国際学会）
4．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Algebraicity Problems in Geometry, Analysis and Number Theory	2023年～2023年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関