様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月　９ 日現在

機関番号：３４４５３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ０３５４７

研究課題名（和文）多変数保型形式の整数論的研究

研究課題名（英文）Arithmetic study on automorphic forms of several variables

研究代表者

長岡　昇勇（Nagaoka，Shoyu）

大和大学・理工学部・教授

研究者番号：２０１６４４０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：当該研究の目的は、多変数の保形形式の整数論的性質を解明することにある。特に多変数のモジュラー形式のフーリエ係数に着目し、それがもつ整数論的性質を調べた。この期の目標は、モジュラー形式のp進的な性質に重点をおいて調べた。研究課題の最大の目標として設定したp進アイゼンシュタイン級数とテータ級数の一致するという現象の証明について、最終的な証明を与えることができた。これは On p-adic Siegel Eisenstein series という論文にまとめられた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
モジュラー形式の理論は、フェルマーの最終定理の証明にも使われたように整数論の様々な分野に応用される。最近では、この理論に深い関係がある楕円曲線の理論が「暗号理論」にも応用されている。楕円曲線は一変数モジュラー形式（楕円モジュラー形式）と関連があるが、当該研究は、このモジュラー形式の概念をおもに「多変数化」したジーゲル モジュラー形式の場合に、そのフーリエ係数が持つ整数論的性質、具体的には、素数pにかんする「mod p理論」や「p進理論」を探求した。多変数の場合の他分野への応用は、これからの課題であるが、我々が見出した様々な興味深い（整数論的）現象は、これから応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：The aim of the study concerned is to elucidate the number-theoretic properties of modular forms of several variables. In particular, the study focuses on the Fourier coefficients of modular forms of several variables and investigates the integer-theoretic properties they possess. The goal of this phase of the research was to focus on the p-adic properties of modular forms. We were able to give a final proof of the phenomenon of the coincidence of p-adic Eisenstein series and theta series, which was set as the main goal of the research project. This was summarized in the paper On p-adic Siegel Eisenstein series.

研究分野：代数学（整数論）

キーワード：モジュラー形式　テータ級数　アイゼンシュタイン級数

１．研究開始当初の背景

(1) モジュラー形式の「mod p 理論」や「p 進理論」は、古典的な一変数モジュラー形式の場合は J.-P.セールや H.P.F.スイナートン・ダイアーで研究され、整数論の様々な分野に応用されてきた。多変数の場合にも、報告者や S.ベッヘラー氏により研究が始められ、いくつかの興味深い結果が得られていたが、いくつかの興味深い未解決問題が残され、その後の研究の発展が望まれた。

(2) アイゼンシュタイン級数は、モジュラー形式の典型的な例として挙げられ、整数論的にも興味深い対象である。志村氏は論文「On Eisenstein series」において、チューブ領域上定義された多変数のモジュラー群の場合にアイゼンシュタイン級数の解析的性質やフーリエ係数の代数性について研究し、成果を得た。残された課題は、その具体的な形、すなわち留数の具体的計算等が残されている。

２．研究の目的

(1) 報告者ならびにベッヘラー氏は、ラマヌジャンが古典的なモジュラー形式の場合に導入した微分作用素（ラマヌジャンのテータ作用素）を多変数モジュラー形式の場合に拡張し、mod p 理論や p 進理論に応用した。この理論には解明すべき問題、例えば p 進アイゼンシュタイン級数の問題等が残されており、この解決を研究目的とした。

(2) 多変数アイゼンシュタイン級数の解析的性質の解明を目的とした。具体的には、アイゼンシュタイン級数のある点での留数を具体的にフーリエ級数として表示することを目的とした。

３．研究の方法

(1) 多変数モジュラー形式について、具体的なフーリエ係数の数値計算を大量に行い、テータ作用素での作用を具体的に見ることにより、予想を立てて証明する。

(2) アイゼンシュタイン級数に対して、極をもつ様々な点を考え、その点における留数をフーリエ級数として具体的に計算する。すなわち、そのフーリエ係数を数論的な関数の特殊値で表示する。

４．研究成果

(1) 「ニーマイヤー格子のテータ級数について」

報告者は、テータ作用素に関して「mod p 核」の概念を定義した。これはモジュラー形式 F でテータ作用素を施すことにより、その像が mod p で消えるという性質をもつものである。報告者の研究の発端は、井草の重さ 35 のカスプ形式が、テータ作用素の mod 23 核の元であるという現象の発見であった。その後、いくつかの「テータ作用素の mod p 核」の元が発見された。論文「Notes on theta series for Niemeier lattices II」で得られた結果は、ニーマイヤー格子とよばれる 24 次元の格子から作られるテータ級数、これは重さ 12 のジーゲルモジュラー形式となるが、格子を選べば、それに付随するテータ級数が、「テータ作用素の mod 11 核」の元であるという事実である。ニーマイヤー格子は 24 次元の格子で、同型を除いて 24 個存在し、それを分類したニーマイヤー氏の名前が付けられている。この 24 個の格子のなかに、リーチ格子とよばれている有限単純群とも関連する重要な格子がある。報告者が得た結果は、リーチ格子のテータ級数も「テータ作用素の mod 11 核」の元であるという事実も含んでいる。また、この論文では、ニーマイヤー格子のテータ級数のフーリエ係数に関する「観察」も含んでいる。上記の結果は、次数が３、４の場合のものであるが、小関氏がすでにリーチ格子の場合に得ていた、そのフーリエ係数に関する膨大な数値データより、５次の場合に「mod 49」核の元ではないかという「予想」を提出している。

(2) 「四元数モジュラー形式が満たす合同関係について」

四元数モジュラー形式は、多変数モジュラー形式の一種で、四元数を成分にもつエルミート行列から作られるチューブ領域上のモジュラー形式である。多変数モジュラー形式の典型的な例であるジーゲルモジュラー形式やエルミートモジュラー形式の場合と同様な理論が展開されている。例えば、アイゼンシュタイン級数の理論やモジュラー形式のなす環の構造も A.クリーク氏を中心とした研究グループにより決定されている。しかしながら、その「整数論的な」性質、たとえば、そのフーリエ係数のもつ整数論的な性質は、これまで十分に研究されたとは言えない。報告者は、四元数モジュラー形式のフーリエ係数の満たすいくつかの「合同関係」を証明した。一つは、ラマヌジャンが一変数のモジュラー形式の場合に示したアイゼンシュタイン級数とカスプ形式の間の合同関係の拡張である。二つ目は、クリークが構成した重さが 14 の四元数カスプ形式について、ラマヌジャンのタウ関数が満たす合同式と類似の合同式が成立することを示した。最後に、ある重さをもつ四元数アイゼンシュタイン級数が、具体的条件を満たす行列に対応するフーリエ係数のみ素数 p で割り切れるというものである。（Congruence relations satisfied by quaternionic modular forms; The Ramanujan Journal）

(3) 「ジーゲルモジュラー形式のフーリエ係数のp可除性について」
(On p-divisibility of Fourier coefficients of Siegel modular forms, The Ramanujan Journal) 報告者とベッヘラー氏が導入した多変数モジュラー形式のテータ作用素について、報告者は、いくつかの「テータ作用素のmod p核」に含まれるモジュラー形式を発見した。(例として、(i)井草の奇数重さをもつカスプ形式 (ii)ある種のアイゼンシュタイン級数 (iii)ある種のテータ級数。)テータ作用素のmod p核に含まれるという事実は、ある条件を満たせば、すなわち行列Tの行列式が、素数pで割り切れなければ、対応するフーリエ係数がpで割り切れることを意味する。すなわち「特別な」対称行列Tについては、フーリエ係数a(T)がpで割り切れるということが起きている。これに対して、全てのa(T)がpで割り切れるというとき、モジュラー形式は、mod p特異形式とよばれている。「全てのa(T)がpで割り切れる」、「ある条件をみたすTについてa(T)がpで割り切れる」、「a(T)はpで割り切れない」という段階が考えられるが、論文では「次数の変化」に応じて、このような段階が次々に起きる現象について、アイゼンシュタイン級数を例に挙げて紹介し、証明を与えている。また、応用としてラマヌジャンの古典的な合同式（アイゼンシュタイン級数とカスプ形式の間の合同式）の拡張にあたるものを証明している。

(4) 「p進ジーゲルアイゼンシュタイン級数について」
(On p-adic Siegel Eisenstein series, Journal of Number Theory, H.Katurada)
2008年の論文（T.Kikuta,S.Nagaoka:On a correspondence between p-adic properties and genus theta series, Acta Arithmetica ）において、菊田氏と報告者は、あるp進ジーゲルアイゼンシュタイン級数とあるジーナステータ級数が一致するという奇妙な現象を報告した。この事実は、「２次の」ジーゲルモジュラー形式の場合に二つの異なった対象が一致するという事実で、これが「２次まで」だけに成立する限定的な事実なのかが問題であった。桂田氏との共同研究により、「制限なし」で、一般の次数nで成立することを証明した。これは10数年来懸案であった「予想」の証明を与えている。（この間、この「予想」の成立を支持する数値例の報告があった。）証明は、p進アイゼンシュタイン級数については、そのフーリエ係数に現れるゼータ関数やL関数の特殊値、すなわちベルヌーイ数や一般ベルヌーイ数のp進的な性質、例えばClausen-von Staudtの定理を用いて計算を行っている。特にベルヌーイ数のp進的な性質を詳しく調べたCarlitzの結果を有効的に使用している。またもう一方の対象であるジーナステータ級数のフーリエ係数は、２次形式論で現れる「局所密度」の計算に帰着されるが、局所密度の計算は原理的には「佐藤-広中の公式」で計算されることが知られているが、我々の計算には適しておらず、共同研究者の桂田氏が直接計算を行った。得られた結果は、ベッヘラー氏等が研究している「テータ作用素のmod pべき核」の元の構成例を与えている。すなわち、テータ作用素を施すと、mod pべきで消えるようなモジュラー形式を、p進アイゼンシュタイン級数の高次近似として具体的に構成している。

(5) 「ジーゲルアイゼンシュタイン級数の留数について」
(Indian Journal of Pure and Applied Mathematics)
ジーゲルアイゼンシュタイン級数の解析的な性質、例えば正則性や、正則な場合のフーリエ係数の代数性等は志村氏の論文「On Eisenstein series」で調べられていた。しかしながら、非正則な場合、例えば極をもつ場合、その留数を具体的に表示するという問題等は手が付けられていなかった。上記論文では、次数mのジーゲルアイゼンシュタイン級数のs=m/2での留数、この場合フーリエ級数を具体的に表示した。そのフーリエ係数には、ゼータ関数の特殊値や一般合流型超幾何関数の特殊値が現れている。最後に、次数２の場合この留数として現れるフーリエ級数と報告者が計算した次数２、重さ２のジーゲルアイゼンシュタイン級数（志村氏の結果により、正則性は保証されている）の類似が指摘されている。

(6) 「長さ24のタイプIIコードの重み多項式」
(Note on the weight enumerators of Type II codes of length 24, with M.Oura)
これは、(1)で述べた結果の「符号理論」版である。(1)で述べたニーマイヤー格子のテータ級数については、格子に対して決まる「コクセター数」という定数で、フーリエ係数が決まるという事実を証明し、それを用いて結果を導いている。符号理論の場合にも対応する定数を定義し、重み多項式が、その定数で特徴づけられることを証明している。符号理論の専門家である大浦学しとの共同研究である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名	4．巻
Shoyu Nagaoka	55
2．論文標題	5．発行年
Notes on theta series for Niemeier lattices II	2021年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
The Ramanujan Journal	327-335
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s11139-020-00304-8	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Shoyu Nagaoka	-
2．論文標題	5．発行年
Congruence relations satisfied by quaternionic modular forms	2023年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
The Ramanujan Journal	-
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s11139-023-00709-1	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Shoyu Nagaoka	-
2．論文標題	5．発行年
Residue of some Eisenstein series	2023年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Indian Journal of Pure and Applied Mathematics	-
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s13226-023-00419-w	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Shoyu Nagaoka	-
2．論文標題	5．発行年
On p-divisibility of Fourier coefficients of Siegel modular forms	2023年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
The Ramanujan Journal	-
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s11139-023-00743-z	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名 Hidenori Katsurada and Shoyu Nagaoka	4．巻 251
2．論文標題 On padic Siegel Eisenstein series	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Journal of Number Theory	6．最初と最後の頁 3-30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2023.04.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 長岡昇勇
2．発表標題 Niemeier格子のテータ級数について
3．学会等名 離散構造における多項式不変量の研究（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）（招待講演）
4．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関