

令和 6 年 6 月 28 日現在

機関番号：34420

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03548

研究課題名(和文) 数論的多様体の幾何学と数論的正値性

研究課題名(英文) Geometry of arithmetic varieties and arithmetic positivity

研究代表者

生駒 英晃 (Ikoma, Hideaki)

四天王寺大学・教育学部・准教授

研究者番号：90533638

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、アデリック因子と基底条件の巨大な組の空間上での数論的体積関数の微分可能性を、最も一般的な形で確立することを目的としたものです。初年度は、Chen氏との共同研究で「数論的 Okounkov 凸体」の一般的で見通しの良い構成法を提示しました。また、森脇氏、川口氏とともに、Faltings の大定理の詳細な証明について書籍を出版しました。次年度は、組の数論的体積関数の連続性と、アデリック因子方向の微分可能性についての論文を出版しました。また、数論的体積関数の境界における片側微分可能性について、数論的に豊富な場合の証明を arXiv に公開しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数多様体上の有理点の研究を行う上で、計量の付いた直線束のノルムの小さい大域切断を考えることが大変重要です。例えばこのような切断は、Faltings の大定理の証明において、超越数論における補助関数の役割を果たしています。私はこのノルムの小さい切断に基底条件を課した上で、その存在や個数の問題を考えました。初年度に新型コロナウイルスが流行し、業務が多忙化したため、計画よりも予定が遅れてしまいましたが、当初の目的であった微分可能性について一般的な証明の方針を得ることはできました。また Yuan と Zhang によって開多様体上の同程度分布定理が示されたため、その関係についても鋭意研究を進めていきます。

研究成果の概要(英文)：A central concern in Arakelov geometry is to study the number of small sections of an adelic line bundle. Arithmetic volume function is a birational invariant that counts the numbers of small sections of high powers of an adelic line bundle. The main purpose of this research is to establish in its most general form differentiability of the arithmetic volume function over the cone of big pairs of adelic Cartier divisors and Cartier divisors. In the first year, in a joint work with Huayi Chen, I proposed a construction of arithmetic Okounkov bodies for subfinite linear series. I wrote a book on Faltings's big theorem with Moriwaki and Kawaguchi. In the second year, I published papers on continuity of arithmetic volume function and on differentiability of arithmetic volume function along adelic Cartier divisors. I also published in an arXiv a manuscript on one-sided differentiability of arithmetic volume function at the boundary in special cases.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学 アラケロフ幾何学 数論的多様体 数論的正値性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

代数多様体上の有理点の研究を行う上で、計量の付いた直線束のノルムの小さい大域切断を考えることが大変重要です。このような切断は代数幾何学における大域切断の類似物になっています。例えば、小さい切断の存在は、Faltings の大定理の証明において、超越数論における補助関数のような役割を果たしました。また、Zhang 氏は数論的な中井-Moishezon 判定法を証明し、それを使って Bogomolov 予想を解決しました。2008 年に Yuan 氏は数論的 Siu 不等式を証明し、それを使って 2011 年に Chen 氏が数論的体積関数の微分可能性を証明しました。

私はアデール因子の小さい大域切断に基底条件を課した上で、その存在や個数の問題を考えました。組に対して高さ関数を導入し、準射影多様体上の同程度分布定理に結びつけることや、数論的 Newton-Okounkov 凸体の形状を数論的交差理論と結びつけることが狙いでした。私は、2009 年に Yuan 氏が導入した近似的数論的 Newton-Okounkov 凸体の構成方法を使って、断面積を評価し、数論的体積関数の因子方向の微分可能性を得ました。しかし、数論的体積関数が境界で両側微分可能ではなく、片側微分係数が数論的制限体積になることを示す必要がありました。

初年度に新型コロナウイルスが流行し、大学業務が多忙化したため、計画よりも予定が遅れてしまいましたが、当初の目的であった片側微分可能性について一般的な証明の方針を得ることはできました。

### 2. 研究の目的

私は、代数体上の代数多様体について、アデール因子の小さい切断であって与えられた因子上で消滅するようなもののテンソル冪に関する漸近的個数を数える数論的体積関数を考えました。本研究の主目的は、このような関数がアデール因子と因子の組の巨大錐上で微分可能であることを示すことです。ただし、組の体積関数は、因子方向の微分可能性は重複度がゼロとなる境界上で両側微分可能でないことがわかっており、正方向からの片側微分係数が数論的制限体積に一致することを示す必要があります。この結果を用いて、Boucksom-Chen の数論的 Newton-Okounkov 凸体の断面積や、代数多様体上の有理点の分布に応用することが目的です。

### 3. 研究の方法

Lazarsfeld-Mustata の最初の方針では、Newton-Okounkov 凸体の断面積の評価によって体積関数の微分可能性を確立しました。2008 年に Yuan 氏は、数論的 Siu 不等式を証明して、高さの小さい有理点の同程度分布定理を証明しました。2011 年に Chen 氏が、数論的 Siu 不等式を用いて、体積関数の微分可能性を証明しました。この方針は、代数幾何学における Boucksom-Favre-Jonsson の定理の類似にあたるものでした。

本研究では Yuan 氏による近似的数論的 Newton-Okounkov 凸体の断面積を評価することで、Lazarsfeld-Mustata のアプローチで、数論的体積関数の微分可能性を証明します。さらに、Green 関数の多重劣調和包を評価することで、数論的体積関数の境界における微分可能性を確立します。

### 4. 研究成果

初年度は、Chen 氏との共同研究で「On subfiniteness of linear series」を著し、部分有限生成な線形系の Newton-Okounkov 凸体の構成方法を一般的で見通しの良い形で与えました。また、森脇氏と川口氏との共同研究で、「Mordell conjecture A complete proof from Diophantine geometry」を著し、Faltings の大定理の Vojta-Bombieri による証明を詳細に解説しました。

次年度は、数論的体積関数の連続性 (Adelic Cartier divisors with base conditions and continuity of volumes) とアデール因子方向の微分可能性 (Adelic Cartier divisors with base conditions and Bonnesen-Diskant-type inequalities) に関する論文を出版しました。数論的体積関数の境界での因子方向の片側微分可能性について、数論的に豊富な場合に証明し、arXiv に公開しました。豊富とは限らない一般の場合についても、証明の方針を得ました。

2024年4月にYuan氏とZhang氏によって準射影多様体上の同程度分布定理が示され、彼らの定理との関係についても鋭意研究を進めていきます。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Chen Huayi, Ikoma Hideaki	4. 巻 6
2. 論文標題 On subfiniteness of graded linear series	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 367~399
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-019-00349-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ikoma Hideaki	4. 巻 73
2. 論文標題 Adelic Cartier divisors with base conditions and the Bonnesen--Diskant-type inequalities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 341~401
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj.20200409	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ikoma Hideaki	4. 巻 61
2. 論文標題 Adelic Cartier divisors with base conditions and the continuity of volumes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 905~947
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2021-0018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Hideaki Ikoma
2. 発表標題 Differentiability of the arithmetic volume function for pairs
3. 学会等名 Intercity Seminar on Arakelov Geometry near Madrid（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hideaki Ikoma
2. 発表標題 Differentiability of the arithmetic volume function for pairs
3. 学会等名 Arithmetic algebraic geometry and mathematical physics in honor of the 60th birthday of Professor Atsushi Moriwaki (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Hideaki Ikoma, Shu Kawaguchi, Atsushi Moriwaki	4. 発行年 2022年
2. 出版社 Cambridge University Press	5. 総ページ数 150
3. 書名 The Mordell Conjecture: A Complete Proof from Diophantine Geometry	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関