

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：53901

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03549

研究課題名（和文）拡大部分圏を用いたセール部分圏の構造解析

研究課題名（英文）Structural analysis of Serre subcategories using extension subcategories

研究代表者

吉澤 毅（Yoshizawa, Takeshi）

豊田工業高等専門学校・一般学科・准教授

研究者番号：00636194

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 600,000 円

研究成果の概要（和文）：（1）セール部分圏による連結ねじれ対が、環のスペクトラムにおける特殊化で閉じた部分集合を用いて実現される条件を、局所部分圏を用いて特徴づけた。この応用として、拡大部分圏を用いたセール部分圏の構成法を与えた。

（2）セール部分圏による連結ねじれ対の概念を加群圏からアーベル圏に抽象化し、ハートによる連結ねじれ対の概念を与えた。

（3）「局所コホモロジー加群のイデアルの選び方に依存しない消去元の存在性は、環のスペクトラム上の非負整数値関数により記述が可能」という消去元の存在定理を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

連結ねじれ対が特殊化で閉じた部分集合で実現される条件の記述は、Gabrielによる局所部分圏の分類定理の拡張であり、部分圏の分類研究に連結ねじれ対を用いるという新たな方向性を与えた点に学術的意義がある。

ハートによる連結ねじれ対の重要性は、独立して研究されている傾理論の「ねじれ部分の区間のハート」と、局所コホモロジー論と相性の良いメルカーソン条件と関連が深い「セール部分圏による連結ねじれ対」が、ハートによる連結ねじれ対の枠組みで同時に扱えるようになった点にある。

消去元の存在性に関する成果は、多分野に应用される部分圏の分類研究が、局所コホモロジー論でも有効であることを明示した点で価値がある。

研究成果の概要（英文）：（1）We have shown that localizing subcategories characterize the condition under which a specialization closed subset of the spectrum of a ring realizes a torsion pair connected by a Serre subcategory. As an application, a method for constructing Serre subcategories using extension subcategories is obtained.

（2）Abstracting the notion of torsion pair connected by a Serre subcategory from the module category to the abelian category, we have given the notion of torsion pair connected by a heart.

（3）We gave an annihilation theorem that nonnegative integer-valued functions on the spectrum of a ring characterize the existence of annihilators of local cohomology modules that do not depend on the choice of an ideal.

研究分野：可換環論、圏論

キーワード：セール部分圏 ねじれ理論 局所コホモロジー加群

## 1. 研究開始当初の背景

(1) セール部分圏とは、部分圏に属する対象の部分対象・商対象・拡大対象が部分圏に収まるものをいう。「特定の構造を持つ部分圏をすべて見つけることは可能か」という研究課題は、「部分圏の分類問題」と呼ばれる。

分類研究の始まりは、Gabriel による局所部分圏(対象の任意の直和が収まるセール部分圏)の分類である。この分類の応用として、遺伝的ねじれ対の構造は切断関手による対象の消滅によって決まることが判明し、ねじれ対の構造の計算を容易にした。さらに、有限生成加群のなす圏におけるセール部分圏は、環のスペクトラムにおける特殊化で閉じた部分集合によって分類できることが判明した。一方、研究対象を加群のなす圏に広げた場合、この圏におけるセール部分圏の分類の問題は未解決のままである。

(2) Dickson によって導入されたねじれ理論におけるねじれ対は、ねじれ部分とねじれ自由部分の対で構成される。ねじれ対は、アーベル圏だけではなく、三角圏・環や圏の局所化・表現論の傾理論などにも応用性があり重要である。ねじれ対はどのように記述(復元)できるのかという学術的な問題は、ねじれ対に対応する概念と互いを分類するという意味でも興味深い。例えば、加群のなす圏の遺伝的ねじれ対の復元は、局所部分圏の分類と密接な関係がある。

先行研究において、ねじれ対の一般化として、セール部分圏で連結したねじれ対の概念を導入した。通常のねじれ対では、ねじれ部分からねじれ自由部分への射は、零対象を経由しなければならない。これに対し、連結ねじれ対では、上記の射はセール部分圏における零対象以外の対象を経由することが許される。

Gabriel の分類定理により、すべての遺伝的ねじれ対は、環のスペクトラムにおける特殊化で閉じた部分集合によって復元が可能である。一方、連結ねじれ対は通常のねじれ対よりも数が多く、上記の部分集合によってすべての連結ねじれ対を復元することは不可能である。しかしながら、特別な連結ねじれ対であれば、上記の部分集合に付随した局所部分圏からセール部分圏による拡大部分圏を構成する方法を用いて復元が可能であることが判明している。

(3) メルカーソン部分圏は、局所コホモロジー論において数学的帰納法が適用できるセール部分圏として導入されたが、本質的な位置づけは不透明であった。しかし、メルカーソン部分圏が局所部分圏の概念を含んでいることに着目すると、局所部分圏が遺伝的ねじれ対に対応することと同様に、メルカーソン部分圏もねじれ理論の枠組みで位置づけが可能であると考えられるのが自然である。実際、上記(2)における連結ねじれ対の概念を導入することにより、メルカーソン部分圏はねじれ理論において自然に現れる部分圏であることが判明した。

背景(1)と(2)を踏まえて、セール部分圏の構造解析と分類は、ねじれ理論と密接に関係していることがわかる。しかし、Gabriel の分類定理では局所部分圏しか分類できない。その理由は、セール部分圏の数に対して、ねじれ対の数が圧倒的に不足しているからである。従って、セール部分圏の分類のためには、ねじれ対の不足問題を解決する必要がある。一方、分類定理は多くの分野に応用されており、分類定理とねじれ対の関係や上記(3)から、局所コホモロジー論にも有用である可能性を伺える。

## 2. 研究の目的

上記の背景で述べたように、セール部分圏の分類問題として解決済みであるものは、遺伝的ねじれ対と関連性がある局所部分圏のみである。本研究では、局所部分圏よりも一般的なセール部分圏である安定(対象の移入対象が収まる)セール部分圏と、安定セール部分圏を含む概念であるメルカーソン部分圏に焦点を当て、セール部分圏の構造解析および分類研究を推進する。

Gabriel により分類された局所部分圏は、遺伝的ねじれ対と密接な関係があることが知られている。しかしながら、局所部分圏よりも数が多い安定セール部分圏やメルカーソン部分圏を扱うためには、遺伝的ねじれ対だけでは圧倒的に数が足りないため、他の道具が必要になることが予想される。局所部分圏と遺伝的ねじれ対の間に関係がある事実と同様に、メルカーソン部分圏と連結ねじれ対の間に深い関連性(切断関手および Hom 関手による連結ねじれ自由部分によるメルカーソン部分圏の特徴づけ)があることが判明している。この関連性は、局所部分圏よりも広範囲のセール部分圏を解析するための道具として、連結ねじれ対が有効である可能性を示唆している。そこで本研究では、分類問題への応用を視野に入れて、連結ねじれ対の解析をさらに進める。また、ねじれ理論の分類問題への適用範囲を広げることを目的として、連結ねじれ対よりも抽象的なねじれ対の構築にも取り組む。

一方、部分圏の分類定理は、圏論や表現論を代表として多くの分野で応用されているが、局所

コホモロジー論への応用は数が少ないのが現状である。そのため、部分圏の分類定理を局所コホモロジー論に有効活用するための足がかりを作ることにも目的に据える。

### 3. 研究の方法

(1) Gabriel の分類定理により、すべての遺伝的ねじれ対は、環のスペクトラムの特殊化で閉じた部分集合を用いて復元が可能であり、ねじれ部分は局所部分圏であることが判明した。同様に「特殊化で閉じた部分集合のみを用いて、すべての連結ねじれ対を復元できるか」という問題を考えるのは自然なことである。残念ながら、この方法ですべての連結ねじれ対を復元することは不可能である。そこで、これまでの連結ねじれ対の研究で重要な役割を果たした「局所部分圏のセール部分圏による拡大部分圏として復元される連結ねじれ部分」に着目する。つまり、連結ねじれ対の復元問題の研究手法として、「特殊化で閉じた部分集合と拡大部分圏を組み合わせることによって、連結ねじれ対を復元できるか」という視点で問題に取り組む。

(2) セール部分圏による連結ねじれ対は、通常のねじれ対の一般化として導入された。ねじれ対をさらに抽象的に扱うための研究の方向性として、(セール性を仮定しない) 部分圏による連結ねじれ対の考察が挙げられる。先行研究において、部分圏に対するセール性の仮定がない場合、「ねじれ部分とねじれ自由部分の共通部分が、連結ねじれ対に付随する(連結部分に該当する) 部分圏と一致するか」という問題を解決できなかったため、ねじれ対のさらなる抽象化の考察を中止した。本研究では、部分圏にセール性を仮定しないという方向性でねじれ対の抽象化を再検討し、今後のメルカーソン部分圏の解析に応用できるように準備を行う。

(3) 局所コホモロジー論の主要テーマとして、局所コホモロジー加群の消滅性に関する研究が挙げられる。例えば、Grothendieck 型の消滅定理や Faltings の消去元の存在定理がよく知られている。「局所コホモロジー関手がコホモロジカルな関手である点、数学的帰納法の利用頻度の高さ、局所コホモロジー加群と環の局所化の相性の良さ」などを踏まえると、応用できる可能性が高い部分圏として分解部分圏が挙げられる。そこで、Dao-Takahashi による階級一致関数を用いた支配的分解部分圏の分類定理を利用して、局所コホモロジー加群の消滅性や消去元の存在性に関する研究を試みる。

### 4. 研究成果

(1) 論文「The realization problem for generalized torsion theories」における成果：

セール部分圏で連結したねじれ対(以下、連結ねじれ対)に関して、下記の3つの成果を得た。

環のスペクトラムにおける特殊化で閉じた部分集合を用いて連結ねじれ対が実現できる条件を、局所部分圏を用いて特徴づけた。この結果は、Gabriel による局所部分圏および遺伝的ねじれ対の特徴づけを拡張させたものである。連結ねじれ対は遺伝的ねじれ対よりも多く存在するため、本研究の特徴づけの結果は、部分圏の分類問題に対して連結ねじれ対を用いるという新たな方向性を与える。

研究における連結ねじれ対が「いつ」復元できるかという問題に対して、研究では、この対が「どのように」復元できるのかという問題に取り組んだ。具体的には、「遺伝的ねじれ対は、ねじれ部分のサポートを用いて復元できる」という Gabriel の分類定理の拡張として、「連結ねじれ対は、連結ねじれ部分のサポートを用いて復元できるか」という問題への取り組みである。

残念ながら、連結ねじれ部分のサポートを用いて構成される部分圏は、構造が大きくなりすぎるため、元の連結ねじれ対を復元できるとは限らない。そこで、Gabriel の構成法と拡大部分圏を用いて連結ねじれ対を復元できる集合の候補の必要条件・上限・下限を特定した。その一方で、連結ねじれ部分のサポートを用いて実現が可能な連結ねじれ対の分類を試みた。その結果として、この方法で復元が可能な連結ねじれ対は、ねじれ部分に局所部分圏を持つ場合のみであることを示した。この事実は、連結ねじれ対が局所部分圏よりも多くの部分圏を分類する可能性を示唆している。

拡大部分圏を用いたセール部分圏の例の構成法を与え、研究目的であるセール部分圏の構造解析に対して、新たな知見を与えた。先行研究で得た「2つのセール部分圏の拡大部分圏を用いた構成法」では、片方のセール部分圏に対して安定性の条件が必要であった。一方、新たな構成法では、セール部分圏の安定性の条件が不要になり、従来の構成法よりも適用範囲が拡大できた点が重要である。

(2) 論文「Torsion theories connected by a heart and hearts of intervals」における成果：

セール部分圏で連結したねじれ対の概念を、加群圏からアーベル圏に抽象化し、ハートで連結したねじれ対の概念を与えることに成功した。抽象化の目的は、傾理論で扱われる「通常のねじ

れ部分に対する区間のハート」と、局所コホモロジー論と相性が良いメルカーソン条件を特徴づける「セール部分圏による連結ねじれ対」の概念の関係性を調べることにあった。これらの概念の関係性は、令和2年度の時点ではほぼ未解明であり、それぞれを独立して研究する必要があった。本論文では、下記の2つの結果を得ることで、この問題を解消した。

独立して研究をする必要があった問題を解消する成果として、「一見して無関係に見える上記の2つの概念は、ハートで連結したねじれ対の概念を用いて同時に記述が可能である」という事実を発見した。具体的には、「ねじれ部分に対する区間のハートおよびセール部分圏は、ハートで連結したねじれ対のハートの部分として実現が可能である」ということを証明した。

アーベル圏におけるねじれ部分に対する区間のハートの一般化として、ハートで連結したねじれ部分に対する区間のハートを導入し、この区間のハートの構造を左右に分割する方法を与えた。既存のハートでは左右の分割部分が一致してしまうため、ハートの一般化により発見ができた分割法である。新たなハートの研究を進めることで、既存のハートでは得られない性質が見つかる可能性は高い。また、既存のハートの類似の理論が、より広い範囲に適用できる点でも興味深い研究対象である。

(3) 論文「Annihilators of local cohomology modules over a Cohen-Macaulay ring」および「Annihilators of local cohomology modules via a classification theorem of the dominant resolving subcategories」における成果：

部分圏の分類研究を局所コホモロジー論に応用するという目的に関して、Dao-Takahashi による支配的分解部分圏の分類定理を応用して、次の結果を得た。

前者の論文では、有限次元 CM 環において、イデアルの選び方に依存しない局所コホモロジー加群の消去元の存在性を、加群の CM 次元を用いて特徴づけ、新たな消去元の存在定理を与えた。

後者の論文では、上記の結果の改良に取り組み、「一般の環において、局所コホモロジー加群のイデアルの選び方に依存しない消去元の存在性は、Takahashi により定義された環のスペクトラム上の非負整数値関数を用いて完全に記述ができる」という事実を発見した。その副産物として、における加群の CM 次元による消去元の存在性の特徴づけの改良版を、「環の次元の有限性」の条件を取り除くという形で得ることができた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yoshizawa Takeshi	4. 巻 594
2. 論文標題 Annihilators of local cohomology modules over a Cohen-Macaulay ring	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 597 ~ 613
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2021.12.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshizawa Takeshi	4. 巻 50
2. 論文標題 The realization problem for generalized torsion theories	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 3133 ~ 3148
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2022.2026372	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshizawa Takeshi	4. 巻 120
2. 論文標題 Torsion theories connected by a heart and hearts of intervals	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 147 ~ 157
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00013-022-01814-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshizawa Takeshi	4. 巻 51
2. 論文標題 Annihilators of local cohomology modules via a classification theorem of the dominant resolving subcategories	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 939 ~ 948
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2022.2117369	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 吉澤毅
2. 発表標題 Serre 部分圏を用いたねじれ理論の一般化について
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会，熊本大学，2020年9月．
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 吉澤毅
2. 発表標題 拡大部分圏に対する Melkersson 条件について
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会，慶應義塾大学，2021年3月．
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉澤毅
2. 発表標題 有限次元 Cohen-Macaulay 環における局所コホモロジー加群の annihilator に関して
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会，千葉大学，2021年9月．
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉澤毅
2. 発表標題 イデアルの選び方に依存しない局所コホモロジー加群の Annihilator
3. 学会等名 第25回岡山可換代数表現セミナー，オンライン開催 (Zoom)，2021年9月．
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------