

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 30 日現在

機関番号：12102
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2023
課題番号：20K03552
研究課題名（和文）ホップ・ガロア理論のスーパー幾何学への応用

研究課題名（英文）Hopf-Galois theory applied to supergeometry

研究代表者

増岡 彰 (Masuoka, Akira)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：50229366

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：近年、物理学におけるスーパー・ストリング理論のインパクトから、数学におけるスーパー幾何学が注目を集めている。本研究は、ホップ・ガロア拡大—すなわち代数幾何学におけるtorsorの非可換アナログ—の理論を、可換と非可換の中間に位置する「スーパー可換」のコンテキストに応用するものである。スーパー代数群の構に関する基本的な研究成果を得て、それらに基づきスーパーtorsorの構造を明らかにした。期待していた、スーパー・シメトリック微分ガロア理論を構築する準備ができたと言える。

研究成果の学術的意義や社会的意義

スーパー幾何学においては、1970年代に本格的な研究が始まって以来、主に微分幾何学的方法が用いられ、代数（幾何）学的方法の開発は遅れていたように思われる。本研究は、この遅れを取り戻すことにわずかでも貢献できたと思う。リー群が定義のうちに順滑性を仮定するのに比して、群スキームの定義がそれを仮定しないという点から見て、後者の取り扱いの方がより難しいと思われがちであるが、少なくともスーパー対称性のコンテキストにおいては、そうとも限らない。代数学の自由な発想で得たスーパー群スキームに関する結果の類似をたどることで、スーパー・リー群に関する新事実を知るといった貴重な経験をした。

研究成果の概要（英文）：In recent years, supergeometry in mathematics has attracted attention due to the impact of superstring theory in physics. This research project aims at applying theory of Hopf-Galois extensions, that is, a non-commutative analogue of torsors in algebraic geometry, to the context of "super-commutative", which sits between "commutative" and "non-commutative". We have obtained some basic results on the structure of super-algebraic groups and applied them to clarify the structure of super-torsors. We can now say that we are now ready to construct the super-symmetric differential Galois theory that we had hoped for.

研究分野：代数学

キーワード：スーパー対称性 ホップ・ガロア理論 スーパー群スキーム スーパー・リー群 デサント トーサー

1. 研究開始当初の背景

スーパー幾何学とは、位数 2 の有限群により次数づけられたベクトル空間全体が、いわゆるスーパー対称性に関して成す対称テンソル圏を足場とする幾何学を指す。その研究が本格的に始められた 1970 年代から、主に微分幾何学的手法が用いられており、代数(幾何)学的手法の開発は遅れているように思われた。そのような中、近年盛んなスーパー代数群の表現論においては、「個々の対象に関して得られた結果がより一般に成り立つか」という問題がしばしばおきていた。それに答えるべく研究代表者は、ホップ代数的手法を用いてスーパー代数群の一般論を展開していた。

2. 研究の目的

本研究は、ホップ代数の理論の中でもとくにホップ・ガロア理論をスーパー幾何学に応用しようとするものであった。ホップ・ガロア拡大は、代数幾何学における torsor を、座標環の言葉に翻訳したものであるが、非可換代数の拡大に対しても意味を持つため、幾何学的不変式論の非可換化として、可換および非可換環論の手法を以て研究されてきた。研究代表者は、「ホップ・ガロア理論が特殊なデサント理論 - 通常の実平坦デサントとやや異なり、射影的生成素デサントとでも呼ぶべき であると捉えている。本研究はその視点から、スーパー-torsor の構造を明らかにすることを目的とした。得られた研究成果を応用することで、近い将来、スーパー・シンメトリック微分ガロア理論を構築する。

3. 研究の方法

この 10 年以上に渡り共同研究を続けてきた Alexandr Zubkov 教授(ロシア・オムスク)との、また指導する大学院生との、共同研究を以て本件研究を進めた。

技術的には主に次の 3 つの方法を用いた。

- ホップ代数テクニック: ホップ代数の利点は、それが代数でありかつ余代数(有限次元代数の双対のフィルター和集合)であるために、可換環論のみならず、非可換環論の方法(例えば接合積構成)が適用できる点にある。従来の torsor について知られておらず、環論的手法を以て初めて示された事実もいくつかある。
- ボゾン化の方法: これは、スーパー・コンテクストにおける考察に、対応する通常の(物理学の用語で「ボゾンの」)コンテクストにおける考察の踏襲ではなく、それへの帰着を意味する。スーパー代数のホップ・ガロア拡大から非可換ホップ・ガロア拡大を構成する方法が研究代表者によってすでに知られ、その構成がボゾン化の一例となっている。
- プレ標準同型の構成: スーパー対称性の対象の間の同型、例えばスーパー代数の間の同型を導くのに、まずその間のスーパー代数射を構成し、それが同型であることを証明する。その際、そのスーパー代数射自体は標準的でないものの、自然なフィルター付けに関して次数化すると標準同型が得られ、従って構成したスーパー代数射が同型である。いわば、プレ標準同型である という状況にしばしばでくわし、この方法が非常に有効に働いた。

4. 研究成果

本研究助成期間中に 8 編の論文を公表した(下のリストの[1] - [8])。そのうち 6 編([3] - [8])が出版済で、1 編([2])が印刷中、1 編([1])が投稿中である。また、2 編([3], [6])が Zubkov 教授(ロシア・オムスク)との国際共同研究による研究成果で、他の 6 編が指導下にあった大学院生との共同研究によるものである。

以下、主な研究成果の概要を述べる。

- スーパー代数群の商 G/H ([2], [3], [7], [8]): スーパー群 G のスーパー部分群 H による商 G/H は、 G , H のそれぞれに付随する通常の群 G_{ev} , H_{ev} に伴う商 G_{ev}/H_{ev} を用いて記述できる。これをスーパー代数群スキーム([3], [7]), スーパー形式群([2]), スーパー・リー群([8])について示した。
- スーパー・アフィン代数群の積分([4]): 積分をもつスーパー・アフィン代数群スキームの特徴づけ、積分を表示する公式、積分を持つスーパー代数群が作用するトーサ-の記述などを与えた。
- アフィンと限らないスーパー代数群([3]): アフィンと限らないスーパー代数群スキームに関し、Harish-Chandra ペアを用いた記述(圏同値)を与え、Barsotti-Chevalley 型定理などを証明した。
- スーパー・トーサ-([1]): 滑らかなアフィン・スーパー代数群スキーム G に対し次を証明した。(i) 滑らかなネーター的アフィン・スーパー・スキーム Y 上の G -スーパー・トーサ-は、付随する通常のトーサ-の持ち上げとして一意的に表される。(ii) G が滑らかな局所ネーター的スーパー・スキームに自由に作用しているとき、自然な仮定のもと、商層 X/G は滑らかな局所ネーター的スーパー・スキームになる。
- 微分つきリー代数([5]): 複素数体上の 1 変数有理関数体 $C(t)$ は自然に微分体を成す。

Pianzola 教授が与えた問題への解答として, 複素単純リー代数のそれぞれに対し, 自然に付随する $\mathbb{C}(t)$ 上の微分つきリー代数の形式 (twisted form) をすべて決定した.

公表論文(2020 - 2023)

- [1] A. Masuoka, Takuya Oe, Yuta Takahashi, Torsors in super-symmetry, submitted; preprint: arXiv2101.03461.
- [2] Yuta Takahashi, A. Masuoka, Quotients in super-symmetry: formal supergroup case, Comm. Algebra, in press; DOI: 10.1080/00927872.2024.2338492.
- [3] A. Masuoka, Alexandr Zubkov, Group superschemes, J. Algebra 605(2022), 89-145; DOI: 10.1016/j.jalgebra.2022.04.027.
- [4] A. Masuoka, Taiki Shibata, Yuta Shimada, Affine algebraic super-groups with integral, Comm. Algebra 50 (2) (2022), 615-634; DOI: 10.1080/00927872.2021.1963758.
- [5] A. Masuoka, Yuta Shimada, Twisted forms of differential Lie algebras over $\mathbb{C}(t)$ associated with complex simple Lie algebras, Arnold Math. Journal, 7 (2021), 107-134; DOI: 10.1007/s40598-020-00155-7.
- [6] A. Masuoka, Alexandr Zubkov, On the notion of Krull super-dimension, J. Pure Appl. Algebra 224 (2020), no.5, 106245; DOI: 10.1016/j.jpaa.2019.106245.
- [7] A. Masuoka, Yuta Takahashi, Geometric construction of G/H in supersymmetry, Transform. Groups 26(1) (2021), 347-375; DOI: 10.1007/s00031-020-09583-3.
- [8] A. Masuoka, Mitsukazu Hoshi, Yuta Takahashi, Hopf-algebraic techniques applied to super Lie groups over a complete field, J. Algebra 562 (2020), 28-93; DOI: 10.1016/j.algebra.2020.06.019.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Akira Masuoka, Alexandr N. Zubkov	4. 巻 605
2. 論文標題 Group superschemes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 89-145
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2022.04.027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Akira Masuoka, Taiki Shibata, Yuta Shimada	4. 巻 50
2. 論文標題 Affine algebraic super-groups with integral	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 615-634
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2021.1963758	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akira Masuoka, Yuta Shimada	4. 巻 26
2. 論文標題 Geometric construction of G/H in supersymmetry	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 347-375
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00031-020-09583-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akira Masuoka, Yuta Shimada	4. 巻 7
2. 論文標題 Twisted forms of differential Lie algebras over $C(t)$ associated with complex simple Lie algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Arnold Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 107-134
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40598-020-00155-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mitsukazu Hoshi, Akira Masuoka, Yuta Takahashi	4. 巻 562
2. 論文標題 Hopf-algebraic techniques applied to super Lie groups over a complete field	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 28-93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.algebra.2020.06.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akira Masuoka, Alexadr Zubkov	4. 巻 224
2. 論文標題 On the notion of Krull super-dimension	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 106245-106274
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2019.106245	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計1件

1. 著者名 増岡彰	4. 発行年 2021年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 204
3. 書名 ガイダンス線形代数	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Akira Masuoka's Homepage https://sites.google.com/site/akira298math/home

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------