

令和 7 年 6 月 12 日現在

機関番号：32615

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2024

課題番号：20K03571

研究課題名（和文）アイソトロピック・グラスマン多様体のシューベルトカルキュラス

研究課題名（英文）Schubert Calculus of Isotropic Grassmannians

研究代表者

松村 朝雄（Matsumura, Tomoo）

国際基督教大学・教養学部・准教授

研究者番号：80755223

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：type Cのシューベルトカルキュラスに関連したさまざまな組み合わせ論的手法を発展させた。具体的には、A) type Cのvexillaryシューベルト多項式に対し、flagged factorial Q関数を用いたタブロー公式を構築した。B) King tableauxとSemistandard Oscillating Tableauを用いてタイプCのRSK対応を定式化し、Cauchy恒等式の双対性と新たな対称性を示した。C) n本の直線のモジュライ空間の同変コホモロジーをorbit harmonicsを用いて計算し、GKM理論との関係を示唆した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

type Cのシューベルトカルキュラスは、type Aと比べると、組み合わせ論がより複雑で多様であり、また、幾何（コホモロジー理論）と代数（表現論）が異なる様相を持っている。GPGQのシューベルト係数の理解という重要課題が残っている一方で、その周辺にも未解決の問題や豊かな一般化の可能性が、たくさん残っていることが、本研究を通してわかった。具体的には、flagged Q関数や、semistandard oscillating tableauxなど、比較的新しい概念の研究を進めることができた。

研究成果の概要（英文）：We have developed various combinatorial approaches related to Schubert Calculus in type C. Specifically: A) We constructed a tableau formula for vexillary Schubert polynomials in type C using flagged factorial Q-functions. B) We formulated an RSK-type correspondence for type C using King tableaux and Semistandard Oscillating Tableaux, revealing a duality behind the Cauchy identity and establishing new symmetry results. C) We computed the equivariant cohomology of the moduli space of n spanning lines using orbit harmonics, suggesting connections to GKM theory.

研究分野：代数・組み合わせ論・幾何

キーワード：Schubert Calculus Orbit Harmonics Cohomology King Tableaux Symplectic Schur RSK correspondence Berele Insertion

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

アイソトロピック・グラスマン多様体のシューベルトカルキュラスの研究は、Yong らのグループが先導していた。実際に、極大直交グラスマン多様体の K 理論シューベルト係数を決定するに至った彼らの一連論文 (2014-1018) があった。また直近では同変コホモロジーのシューベルト係数の決定に向けて、ラベル付き辺のあるタブローの jeu de taquin を提案した論文が 2022 年に出版されている。Yong らのグループの基本方針は、環の結合法則と LR 規則の一部である Chevalley 規則がすべての構造係数を一意的に決めるという性質を基づく。これは、jeu de taquin などを用いて抽象的に構造定数を定めた上で、結合法則と Chevalley 規則が満たされていることを示せば、シューベルト係数と一致するという論理である。

2. 研究の目的

申請者らの研究方針の特徴は、シューベルト類それ自身に内在する代数的・組合せ論的な構造を調べることにある。すなわちシューベルト類を代表する特殊多項式そのものが持つ豊かな特性をあぶり出し、積構造の解明につなげることだ。このアプローチでは、組合せ論的な煩雑さを少しでも回避されるメリットがある。加えて、特殊多項式の性質を探求することが、シューベルトカルキュラスにおける成果にとどまらず、他の関連分野への応用を生み出すと考える。それは、古典的なシュアー多項式や P -, Q -関数が表現論・可積分系の理論などによく現れることから自然な成り行きと考えられた。

3. 研究の方法

申請者は、GP 関数の組み合わせ論的表示を与えると池田氏が予想している set-valued decomposition tableaux と、池田一成瀬に導入された GP 関数の組み合わせ論的表示に現れる set-valued marked shifted tableaux の対応を調べたが、さまざまな難しさに直面し、すこし周辺の組み合わせ論の研究を積み重ねて、本課題の足場を広げるように方法を転換した。成果が出たものと出なかったものがあるが、以下のトピックで研究を行った。

A) type C の non-maximal isotropic Grassmannian のコホモロジーシューベルト類の組み合わせ論

B) 同変コホモロジー環の表示と Orbit Harmonics

C) Symplectic シュアー多項式の組み合わせ論

D) permutohedral variety のコホモロジー環の既約分解

4 . 研究成果

上記の A)B)C)についての成果を以下に要約する。

A) 論文「A Tableau Formula for Vexillary Schubert Polynomials in Type C」では、Ikeda–Mihalcea–Naruse によって導入された型 C のダブル・シューベルト多項式の、特に vexillary signed permutation に付随したものについて、新たなタブロー公式を与えた。shifted tableaux を拡張した flagged marked shifted tableaux を新しく導入し、その母関数として「flagged factorial Q 関数」と関数を定義し

た。Type C の 2 重シューベルト多項式の 3 変数を使って記述される。この新しい関数が、Schur–Pfaffian で表示できることを証明する。この構成は、Ivanov の factorial Q 関数や Anderson–Fulton の Pfaffian 公式とも一致し、type C の vexillary signed permutation に対する 2 重シューベルト多項式が flagged factorial Q 関数で与えられることを示した。また、Lagrangian な置換に関する対称性から、Ivanov の Q 関数の新たなタブロー表現も導出される。論文は、より広い「theta-vexillary」な場合への拡張の可能性にも言及しており、今後の研究への展望を与えている。

B) Chou と Rhoades との共同研究で執筆したプレプリント「Equivariant Cohomology and Orbit Harmonics」では、 k 次元複素ベクトル空間における、 n 本の直線の組(spanning lines)を集めたモジュライ空間を考えた。 n 本のそれぞれ組が張る部分空間の次元が d である場合のモジュライ空間は k 次元トーラスが作用するので、それに関する同変コホモロジー環を明示的に記述した。その際に、組合せ的な変形理論である「orbit harmonics」が用いられ、従来未解決であった。これにより、一般化された coinvariant 環の幾何モデルの理解が深まり、今後の類似空間に対するコホモロジーの記述にも新たな道を開くことが期待される。実際に、このプレプリントの後に発表された論文(FPSAC2025 で受理されている)で、Permutohedral variety という特別なトーリック多様体の同変コホモロジーを Orbit Harmonics で再検討することができたことや、GKM 理論と Orbit Harmonics の関連を示唆する研究も新しくスタートできたのは、大きな収

獲である。また、上記の spanning lines のモジュライ空間を typeBCD に拡張する研究も現在進行中である。

C) 小林雅人氏との共同研究でプレプリント「RSK correspondence for King tableaux with Berele insertion」を投稿することができた。この論文では、symplectic Schur 多項式の組み合わせ論モデルを与える King tableaux に対し、Berele 挿入を用いた RSK 対応を構成した。これは、Sundaram (1986) の結果を新たな視点から再定式化したものである。Recording tableau と呼ばれる Q 記号には、Lee (2025) が導入した半標準振動タブロー (SSOT) という新しい概念を採用し、King tableaux との対応を示す。また、タイプ A とタイプ C における RSK 対応の比較を通じて、Cauchy 恒等式の背後にある双対性を明らかにすることができた。さらに、SSOT の生成関数が対称であることを新たな Bender-Knuth involution の構成により証明した。主な結果には、タイプ C Knuth 同値の特徴付け、RSK 対応の構成、Cauchy 恒等式的双対性、および SSOT 多項式の対称性の証明が含まれる。これらの成果は、タイプ C の組合せ論に新たな道を拓くとともに、タイプ A 理論との豊かな相互作用を示す。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tomoo Matsumura	4. 巻 30
2. 論文標題 A Tableau Formula for Vexillary Schubert Polynomials in Type C	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The electric Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1,28
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.37236/11091	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分 担者	池田 岳 (Ikeda Takeshi) (40309539)	早稲田大学・理工学術院・教授 (32689)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	UC San Diego		