1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月 ２８ 日現在

機関番号：１１１０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：２０Ｋ０３５７４

研究課題名（和文）平面への安定写像と折り目リフトの組を用いた3次元トポロジーの研究

研究課題名（英文）Study of 3-dimensional topology with a pair of stable map to the plane and its fold map lift

研究代表者

山本　稔（Yamamoto, Minoru）

弘前大学・教育学部・准教授

研究者番号：４０４３５４７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：（1）特異点集合が2次元球面2つの，レンズ空間L(p,p-3)から3次元空間への折り目写像の族を構成した．（2）3次元球面から3次元空間への折り目写像で，特異点集合が2次元球面2つの写像から，2次元球面1つの写像へのジェネリックホモトピーの構成に取り組んだ．途中までしか構成できず，継続中である．（3）閉3次元多様体から平面への安定写像を3次元空間への折り目写像にリフトさせる研究について，局所的なリフト可能条件を考察した.それらをつなぎ合わせる大域的な条件を記述する必要があることが判明し，継続中である.

研究成果の学術的意義や社会的意義
Morse関数や平面への安定写像を用いて，3次元多様体のトポロジーを研究する事は盛んに行われている．3次元空間への安定写像を用いる方法も少しずつ行われている．終域を3次元空間とした場合，・具体例が少ない・写像の全体像を記述するのが困難・写像の変形の様子も記述するのが困難，といった課題がある．研究継続中の成果が多くなってしまったが，今回の成果で3次元空間への安定折り目写像や安定写像を可視化する，1つの方法を提案することができた．

研究成果の概要（英文）：(1) I constructed a family of fold maps of lens space L(p,p-3) to the 3-space with two 2-spheres as singularity sets.
(2) I tried to construct a generic homotopy from a fold map with two 2-spheres as the singularity set to a fold map with one 2-sphere as the singular set. I was only able to construct it up to the halfway point and am still working on it.
(3) In the study of lifting a stable map from a closed 3-manifold to the plane to a fold map to the 3-space, I considered local liftability conditions. It turned out that it is necessary to describe global conditions for connecting local conditions together. I am continuing the work.

研究分野：微分位相幾何学

キーワード：折り目写像　安定写像　リフト　ジェネリックホモトピー

１．研究開始当初の背景

多様体のトポロジーを調べる上で，Morse 関数を用いることは有用である．Morse 関数から多様体のハンドル分解が得られ，ハンドル体の貼り合わせを見ることで多様体のトポロジーに関する情報が得られるからである．例えば，向き付け可能な閉 3 次元多様体上に適切な Morse 関数を与えると，Morse 関数から多様体の Heegaard 分解が得られる．さらに，貼り合わせ写像のアイソトピー類が多様体の微分同相類を決定する．

向き付け可能な閉 3 次元多様体の代表例として，レンズ空間とよばれるものがある．レンズ空間は，指数が 0，1，2，3 の臨界点が 1 つずつで，直線上に臨界値もこの順で並ぶような Morse 関数を持つ．この Morse 関数により，レンズ空間は種数 1 のハンドル体 2 つに分解されることがわかる．さらに，ハンドル体の境界（トーラス）同士の貼り合わせ写像のアイソトピー類と，レンズ空間の微分同相類が 1 対 1 に対応することが知られている．しかし，トーラス同士の貼り合わせ写像のアイソトピー類は，Morse 関数からは読み取れない．そのため，Morse 関数単体では，レンズ空間の微分同相類は決定できない．

そこで，終域を直線ではなく，平面や 3 次元空間と次元を上げ，Morse 関数に対応する「良い」写像を用いれば，トーラス同士の貼り合わせ写像のアイソトピー類が，「良い」写像から読み取れるようになり，レンズ空間の微分同相類は決定できるようになるのではないかと考えた．ここで Morse 関数に対応する「良い」写像は，安定写像とよばれるものである．安定写像とは，ホモトピーで少し摂動したものと常に右左同値である（特異値集合に大きな変化がない）写像のことである．多様体から平面，3 次元空間などユークリッド空間への安定写像を用いて，定義域多様体のトポロジーを調べる研究は，「大域的特異点論」の名の下，Saeki，Sakuma など，多くの研究者によって行われており，様々な成果が得られている．

２．研究の目的

今回，私は安定写像を安定折り目写像にリフトさせ，これらの写像の組を用いることで，定義域多様体の微分同相類が決定できないかと考えた．ここで折り目写像とは，Morse 型特異点のみをもつ写像のことである．安定写像は一般に，終域の多様体の次元が上がると，Morse 型特異点より複雑な特異点を持つ．安定折り目写像は安定写像の中で，一番単純な特異点のみを許容するような扱いやすい写像と言える．

リフトを用いることを考えたのは，次の例に由来する．まず「１．研究開始当初の背景」で述べた，レンズ空間からの Morse 関数を，特異値集合が 2 つの同心円になる平面への安定折り目写像にリフトさせる．するとこの安定折り目リフトを許容するレンズ空間は，$L(p,1)$という形のレンズ空間に限られることがわかる．続いて，この$L(p,1)$からの安定折り目写像を，3 次元空間への安定折り目写像にリフトさせると，そのようなリフトを持つものは$S^2\times S^1$のみであることがわかる．このようにレンズ空間からの関数を 3 次元空間にまでリフトさせると，Morse 関数単体ではわからなかったレンズ空間の微分同相類が決定できるようになる．

上の例に基づき，向き付け可能閉 3 次元多様体から平面への安定写像に対し，3 次元空間への安定折り目リフトの存在条件，分類ならびに 2 つの写像の組を用いて定義域多様体のトポロジーを解明することが今回の研究の目的である．ここで，Morse 関数の安定折り目リフトを考察するのではなく，平面への安定写像の安定折り目リフトを考察することにした理由は以下の通りである．

・上の例で見たように，Morse 関数を平面への安定折り目写像にリフトさせても，定義域多様体の微分同相類は一意に定まらない．平面への安定写像からスタートした方が，ある程度定義域多様体の微分同相類が絞られているため，安定折り目リフトを 1 つ与えると，定義域多様体の微分同相類も 1 つに定まると期待されるからである．

・安定写像は安定折り目写像より，複雑な特異点を許容するため，3 次元空間へのリフトを安定写像とした場合，定義域多様体のトポロジーの自由度が高くなると予想される．そこで，3 次元空間へのリフトは安定折り目写像に制限した．Eliashberg（1970 年）によって，全ての向き付け可能閉 3 次元多様体は 3 次元空間への折り目写像を持つことが示されている．そのため，安定折り目写像へのリフトが特殊すぎることは無い．

３．研究の方法

向き付け可能閉 3 次元多様体Mから平面への安定写像$f\colon M\to\mathbb{R}^2$において，特異点集合は多様体内の閉曲線となり，特異点は定値折り目特異点，不定値折り目特異点，カスプに分類される．また，特異点集合に安定写像fを制限すると，カスプを除けば正規交叉のはめ込みになることに注意する．与えられた安定写像fを，3 次元空間へリフトした安定折り目写像$F\colon M\to\mathbb{R}^3$を構成するため，motion picture とよばれる手法を利用する．これは一旦，平面への安定写像を直線への Morse 関数に射影し，Morse 関数の各正則値の逆像（向き付け可能な閉曲面）を平面への安定写像へ連続的にリフトさせてゆく手法である．リフトの構成にあたっては，次の点に注意する．

・もともとの平面への安定写像fは射影により，各正則値の逆像が Morse 関数へ連続的にリフ

トしていると捉えられる．この制限のもとで各正則値の逆像を，平面への安定写像へリフトさせてゆかねばならない．
・平面への安定写像のリフトを連続的に構成するにあたり，射影した Morse 関数の臨界値の前後で正則値の逆像のトポロジーが変化する．またfのカスプや正規交叉点の前後では，リフトに幾つかの可能性が生じる．
これらに注意しながらリフトをつなぎ合わせてゆくことで，平面への安定写像fが 3 次元空間への安定折り目写像を持つための条件を考察する．
次に，平面への安定写像fとその安定折り目リフトFの組(f,F)を用いて，定義域の向き付け可能 3 次元多様体Mの微分同相類について考察する．この問題についても一旦，直線への Morse 関数に射影し，Morse 関数から得られるハンドル分解を用いる．先ほどの安定折り目リフトの構成において，正則値の逆像をリフトさせたが，これがハンドル体の貼り合わせ写像に関する情報を持っている．そこで，リフトさせた安定折り目写像を 3 次元空間の中で変形させることで，貼り合わせ写像から得られる情報を抽出するという手法を取る．また，fの Stein 分解から得られる 2 次元多面体も同時に変形し，単純な多面体に直すことで，Mのトポロジーについて研究する．

４．研究成果
（1）レンズ空間$L(p,p-3)$から 3 次元空間への安定折り目写像の構成（pと$p-3$は互いに素）．
まず，2 つの 2 次元球面を特異点集合として持つ，レンズ空間$L(4,1)$から 3 次元空間への安定折り目写像を構成した．次にこの安定折り目写像に類似の安定折り目写像を 2 種類構成した．これら 3 種類の安定折り目写像を，順序よく並べ，適当な位置で切り貼りすることにより，特異点集合が 2 つの 2 次元球面になるような，レンズ空間$L(p,p-3)$から 3 次元空間への安定折り目写像の族を構成した．具体例の構成には，「3．研究の方法」で述べた手法，motion picture を用いた．この成果については 2022 年に開催された研究集会にて口頭発表した．なお，以下のことが未解決である．
・レンズ空間$L(4,1)$からの安定折り目写像に似た，2 種類の安定折り目写像も，$L(4,1)$からの安定折り目写像か．もしそうである場合は，折り目写像の空間の中で互いにホモトピックか．
・一般のレンズ空間から 3 次元空間への安定折り目写像はどのように構成されるか．この問題については，レンズ空間$L(p,p-3)$からの安定折り目写像の構成から，いくつか規則性が見出せたため，今後の進展が期待できる．
・特異点集合が 2 次元球面 1 つからなるような安定折り目写像はどのようにして構成できるか．
（2）3 次元球面から 3 次元空間への安定折り目写像のジェネリックホモトピー（継続中）．
3 次元球面から 3 次元空間への安定折り目写像で，特異点集合が 2 次元球面 2 つからなる写像をf，2 次元球面 1 つからなる写像をgとする．3 次元空間への写像を平面に射影し，それらの写像の変形を通してジェネリックホモトピーを構成する手法により，fとgの間のジェネリックホモトピーの構成に取り組んだ．安定折り目写像fから出発して変形していき，次で説明する安定写像hに変形するところまではできた．まず安定写像hの特異点集合は 2 次元球面である．その内，北半球と南半球が折り目特異点に，赤道がカスプに，赤道上の 4 点がスワロウテイルになっている．しかし，安定写像hと安定折り目写像gとの間のジェネリックホモトピーが構成できなかった．解決できなかったものの，これまでの状況を経過報告として，2023 年に開催された 2 つの研究集会において口頭発表した．特異値集合を見て変形するだけではなく，3 次元球面内の特異点集合も見ながら変形するなど，解決に向けて引き続き色々試していく計画である．
（3）向き付け可能な閉 3 次元多様体から平面への安定写像を 3 次元空間への安定折り目写像にリフトさせる研究（継続中）．
まずは研究計画に従って，motion picture を利用し，局所的なリフト可能性について考察した．リフトするための条件を得ることはできたが，その次のステップに進むことができなかった．これは以下の理由による．
・数種類のリフトの可能性がある場合，局所的なリフト可能条件によって，それらを区別することは可能である．しかし，局所的なリフト可能な条件を列挙するだけでは不十分で，それらをつなぎ合わせていくことができるような言葉で条件を記述する必要があることが判明した．
・局所的なリフトをうまくつなぎ合わせることができたとしても，できた安定折り目写像の定義域多様体が，もとの定義域多様体と微分同相になっているか判定する道具が不十分であった．
このように，平面への安定写像を局所的に考察することに加え，大域的に条件を記述する上手い方法が必要となる．また，リフトした安定折り目写像の定義域多様体のトポロジーを調べる手法も必要となる．そこで，
・Levine，Costantino-Thurston，Ishikawa-Koda，Kitazawa-Saeki などの先行研究を踏まえ，平面への安定写像から得られる Stein 分解と，リフト，定義域多様体のトポロジーとの関係を調べる．
・(1)，(2）で構成した具体例を用いて，リフト可能な条件を大域的に記述するための方法を探るとともに，定義域多様体のトポロジーも読み取れるか考察する．
といった手法で，継続して研究していく計画である．
（4）ジェネリック folding に関する共同研究．
秋田大学の小林真人先生と，ジェネリック folding に関する共同研究をおこなった．これは，2 つ組の 2 次形式から得られる平面への写像を摂動することで，ジェネリックな写像を構成する

というものである．定義域のユークリッド空間の次元は 2 次元以上で，写像を局所的に構成するものであるため，3 次元空間から平面への局所的な安定写像と捉えることで，(3) の研究にも関係付けられると思われる．本研究は論文としてまとめているところであるが，2022 年に開催された研究集会において口頭発表した．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 山本稔
2．発表標題 2次形式の組から得られる平面へのgeneric foldingについて
3．学会等名 2021年度日本数学会東北支部会
4．発表年 2022年

1．発表者名 山本稔
2．発表標題 レンズ空間L(p,p-3)からR^3への折り目写像の構成
3．学会等名 多様体と特異点
4．発表年 2022年

1．発表者名 山本稔
2．発表標題 3次元球面から3次元空間への折り目写像間のジェネリックホモトピーについて(経過報告)
3．学会等名 Singularities of Differentiable Maps and Its Applications -In commemoration of Goo Ishikawa's all years of hard work-
4．発表年 2023年

1．発表者名 山本稔
2．発表標題 3次元球面から3次元空間への折り目写像間のジェネリックホモトピーについて(経過報告)
3．学会等名 写像による多様体の可視化勉強会 フレッシュマンセミナー5
4．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関