

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03582

研究課題名（和文）トロピカル幾何を用いた量子コホモロジーと周期の研究

研究課題名（英文）Study of quantum cohomology and periods using tropical geometry

研究代表者

入谷 寛 (Iritani, Hiroshi)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：20448400

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：超弦理論の予想するミラー対称性の片側（シンプレクティック幾何）において、ガンマ整構造と呼ばれる超越数上定義された構造が現れることが知られている。本研究はガンマ整構造の起源を解明することを目標とし、トロピカル幾何を用いたホッジ理論的ミラー対称性の理解や、ガンマ予想、グロモフ・ウィッテン理論の双有理変換の下での関手性といった問題に取り組んだ。双有理変換の下での量子コホモロジーの変化をリーマン・ヒルベルト問題の解を使って記述する予想を定式化し、また厚東裕紀氏と共同で射影束の量子コホモロジーの分解定理を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子コホモロジーはシンプレクティック多様体の不変量である。通常のコホモロジーと違って連続写像に関する分かりやすい関手性を持たないためその構造を一般に理解するのは困難である。研究代表者により導入された「ガンマ整構造」は量子コホモロジーにある種のトポロジカルな構造を与えるものであって、古典的なコホモロジー理論であるK理論との関係を示唆する。本研究ではリーマン・ヒルベルト問題を通じてガンマ整構造と量子コホモロジーの分解とを結びつけ、また、射影束の場合に実際に量子コホモロジーの分解を構成することに成功した。特に後者はこれまでにないタイプの新しい結果である。

研究成果の概要（英文）：It is known that the Gamma-integral structure appears in one side (symplectic side) of mirror symmetry predicted by superstring theory. In this research, we aim to clarify the origin of the Gamma-integral structure; we worked on Hodge-theoretic mirror symmetry from a viewpoint of tropical geometry, Gamma conjecture, and functoriality of Gromov-Witten theory under birational transformations. We formulated a conjecture on the change of quantum cohomology under birational transformations using a solution to a Riemann-Hilbert problem, and in joint work with Yuki Koto, we proved a decomposition theorem of quantum cohomology of projective bundles.

研究分野：幾何学

キーワード：量子コホモロジー ミラー対称性 周期 トロピカル幾何 グロモフ・ウィッテン不変量 同変コホモロジー フーリエ変換 ガンマ類

1. 研究開始当初の背景

シンプレクティック幾何と複素幾何の間の双対性として「ミラー対称性」と呼ばれる対称性が物理の超弦理論により予言されている。ミラー対称性の数学的な表現として、ホッジ理論のミラー対称性というものがある。これは、シンプレクティック幾何側で「量子コホモロジー」を考え、複素幾何側では「周期」を考えると、両者の定めるホッジ構造が同型になることを予言するものである。研究代表者はトーリック軌道体やその完全交差に対するホッジ理論のミラー対称性の研究を進める中で、シンプレクティック幾何側の量子コホモロジーにある隠された整構造が存在することを発見していた。この整構造はガンマ整構造と呼ばれ、ミラー対称性の下で複素幾何側に自然に存在する整構造(整数係数のコホモロジー群が定めるもの)と対応することが予想される。また、実際にそうであることが多くの例で検証されてきた。ガンマ整構造はリーマンゼータ値を係数に持つ特性類(ガンマ類)を使って定義されるが、そのシンプレクティック幾何側からの存在理由は明らかではなかった。

ガンマ整構造が量子コホモロジーのある種の位相的構造を与え、グロモフ・ウィッテン理論の関手性とかかわることも研究代表者の過去の研究で示唆されていた。例えば Galkin, Golyshev との共同研究によるガンマ予想 I においては、ファノ多様体の量子コホモロジーから、位相不変量であるガンマ類を取り出すことができることが予言されていた。また同じく Galkin, Golyshev との共同研究になるガンマ予想 II およびそれを一般化した三田・社本の予想においては量子コホモロジーの分解と位相的 K 群の半直交分解とがガンマ整構造を通じて結びついていることが示唆されていた。さらに Coates, Jiang との共同研究で示されたトーリック軌道体の完全交差に対するクレバント変換予想においては、量子コホモロジーの同型がガンマ整構造を通じて、(位相的 K 群の)フーリエ・向井変換から誘導されることが示されていた。

Abouzaid, Ganatra, Sheridan との共同研究ではトロピカル幾何を用いてガンマ整構造を説明する新しい方法を提案した。この研究では Batyrev によるカラビ・ヤウ多様体のミラー対に対して、一方のカラビ・ヤウ多様体の周期の漸近挙動が他方のカラビ・ヤウ多様体のガンマ類によって記述できることをトロピカル幾何の方法により示した。特に、ガンマ類に現れるリーマンゼータ値がトロピカル化における誤差項から生じていることを明らかにし、トロピカル幾何がガンマ整構造を説明する有力な方法であることを示唆した。

2. 研究の目的

上に述べたようにガンマ整構造は量子コホモロジーにおけるリーマンゼータ値を含む超越的な構造であるが、そのシンプレクティック幾何側における起源はよく分かっていない。本研究の目標は、ガンマ整構造がシンプレクティック幾何に現れる理由、またそれが量子コホモロジーで果たす役割を解明することである。より具体的には、以下の問題を設定した。

- (1) トロピカル幾何を通じて量子コホモロジーと周期の対応を明らかにし、Abouzaid, Ganatra, Sheridan との共同研究で得られた結果をより一般のミラー対に拡張する。またカラビ・ヤウ多様体だけではなくファノ多様体のミラー対称性にも取り組み、その場合のミラー側(複素幾何側)に現れる指数周期の漸近挙動も調べる。
- (2) グロモフ・ウィッテン理論においてガンマ整構造が果たす役割、特にガンマ予想、双有理変換の下での関手性、グロモフ・ウィッテンポテンシャルの保型性などを調べる。ガンマ予想および三田・社本予想は、量子コホモロジー微分方程式の不確定特異点におけるストークス構造が、導来圏あるいは位相的 K 群の半直交分解から(ガンマ整構造を通じて)誘導される、とする予想である。特に量子コホモロジー環(および量子微分方程式)は導来圏の分解に伴って非自明な分解を持つことが期待される。また、このような量子コホモロジーの分解は幾何学的な変換から誘導されることが期待され、例えば非クレバントな双有理変換の下で量子コホモロジーが分解し、それが位相的 K 群の半直交分解からくることが予想される。また量子コホモロジーの分解および関手性は、高種数のグロモフ・ウィッテン理論に持ち上がり、グロモフ・ウィッテンポテンシャルのある種の保型性とかかわることが期待される。
- (3) 量子コホモロジーにおけるガンマ整構造が、深谷圏からどのように現れるかを調べる。Katzarkov, Kontsevich, Pantev は深谷圏の位相的 K 群がガンマ有理構造を与えるはずである、との提案を行ったが、具体的にガンマ類がどのように深谷圏から現れるのかは明らかではない。

3. 研究の方法

- (1) トロピカル幾何を用いて Gross-Siebert 計画に現れるミラー対の周期の漸近挙動を調べる。またファノ多様体のミラーである Landau-Ginzburg 模型に付随する指数周期についてもトロピカル幾何を用いた研究を行う。またファノ多様体のミラー対称性とカラビ・ヤウ多様体のミラー対称性の関係についても調べる。
- (2) 量子コホモロジーが非クレパントな変換の下でどのようにふるまうかについて、ミラー対称性が知られている場合には、ミラーを使った研究を行う。さらに量子コホモロジー微分方程式をその直和因子からどのように復元するかについて、リーマン・ヒルベルト問題としての定式化を試みる。また同変量子コホモロジーにはその同変パラメータに関する差分加群の構造が入るが、それとガンマ整構造との関係を調べる。
- (3) ミラー対称性にかかわる研究集会を毎年 12 月に開催し、研究交流および研究成果発表を行う。さらにエジンバラ大学 ICMS においてミラー対称性における周期の研究に関する国際研究集会を開催する。
- (4) ミラー対称性および関連分野における研究員を若干名雇用し、研究討議および研究情報収集を行う。

4. 研究成果

- (1) 当初の目標であったトロピカル幾何を使った周期およびガンマ整構造の解明については、部分的な進展はあったものの大きな成果はまだ得られていない。また深谷圏の観点からのガンマ整構造の解明についても大きな進展は得られなかった。一方、Abouzaid, Ganatra, Pantev, Sheridan 氏とは関連する話題についてエジンバラ大学 ICMS で国際研究集会「Periods in Mirror Symmetry」を開催し、この話題について関心と好評を得た。またトロピカル幾何を使った周期の計算について代数学シンポジウムで講演を行い、論説記事を執筆した。
- (2) トーリック軌道体の非クレパントな変換の下で量子コホモロジーがどのように変化するかを調べ、雑誌 SIGMA にて発表した。この論文ではトーリック軌道体の GIT 壁越えに伴う非クレパント変換の下で、(同変)量子コホモロジーが直和に分解すること、また、非クレパント変換が弱ファノトーリック軌道体の重み付き爆発である場合には、量子コホモロジーの分解がガンマ整構造を通じて Orlov による導来圏(あるいは位相的 K 群)の半直交分解から誘導されることを示した。この論文で示した結果を基として、多様体を滑らかな中心に沿って爆発したとき量子コホモロジーがどう変化するかについての一般的な予想を与えた。この予想によれば、爆発の量子コホモロジーは元の多様体の量子コホモロジーと爆発の中心の量子コホモロジーからある種のリーマン・ヒルベルト問題を解くことにより与えられる。この予想については 2022 年国際数学者会議の予稿集に掲載予定である。
- (3) Klemm 氏らの物理学者のグループにより、あるバナナ型のファインマン図式に付随するファインマン積分の漸近挙動があるファノ多様体のガンマ類を使って与えられることが数値実験により予想されていた。この予想を、ファノ多様体に対するガンマ予想をフーリエ変換することにより解決し、雑誌 ATMP で発表した。この問題はカラビ・ヤウ多様体とファノ多様体のミラー対称性(あるいはガンマ予想)の関係を調べることと関係している。一般にファノ多様体が与えられると、カラビ・ヤウ多様体がファノ多様体上の標準束の全空間を取ること、あるいは、ファノ多様体の反標準切断を取ることによって与えられる。このようにして得られるファノ多様体とカラビ・ヤウ多様体の間のガンマ予想の関係を一般に調べ、論文としてまとめた。この結果は次年度以降に発表する予定である。
- (4) 厚東裕紀氏との共同研究では、ベクトル束に付随する射影束に対するミラー定理を証明し、射影束の量子コホモロジーが底空間の量子コホモロジーの直和に分解することを証明した。ベクトル束が直線束の直和に分解している場合はすでに知られている結果であるが、そうでない場合は新しい結果である。この量子コホモロジーの分解は、射影束の導来圏が底空間の導来圏のコピーに半直交分解することと関係すると期待される。ガンマ整構造を通じて量子コホモロジーと導来圏の分解が対応することを示すのは今後の課題である。また、この結果については次年度以降に発表する予定である。
- (5) ミラー対称性に関する研究集会を毎年 12 月に開催し、研究交流を進めた。

(6) 量子コホモロジーD加群の分解に関して2022年国際数学会議で招待講演を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Iritani Hiroshi	4. 巻 26
2. 論文標題 Asymptotics of the Banana Feynman amplitudes at the large complex structure limit	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Theoretical and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1239 ~ 1245
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/ATMP.2022.v26.n5.a5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Coates, Tom; Iritani, Hiroshi	4. 巻 61
2. 論文標題 Gromov-Witten invariants of local P2 and modular forms	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 543-706
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2021-0010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Iritani, Hiroshi; Milanov, Todor; Ruan, Yongbin; Shen Yefeng	4. 巻 269
2. 論文標題 Gromov-Witten Theory of Quotients of Fermat Calabi-Yau varieties	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1-92
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/memo/1310	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Abouzaid, Mohammed; Ganatra, Sheel; Iritani, Hiroshi; Sheridan, Nick	4. 巻 24
2. 論文標題 The Gamma and Strominger-Yau-Zaslow conjectures : a tropical approach to periods	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Geometry & Topology	6. 最初と最後の頁 2547 ~ 2602
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/gt.2020.24.2547	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Iritani, Hiroshi	4. 巻 16
2. 論文標題 Global Mirrors and Discrepant Transformations for Toric Deligne-Mumford Stacks	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 1-111
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2020.032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計11件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Hiroshi Iritani
2. 発表標題 Equivariant quantum cohomology and Fourier transformation
3. 学会等名 Geometry, Statistics & Dynamics. Celebrating 20 years of UK-Japan Winter Schools (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Iritani
2. 発表標題 Approaches to the gamma conjecture
3. 学会等名 Periods in mirror symmetry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Iritani
2. 発表標題 Equivariant quantum cohomology and its applications
3. 学会等名 Calabi-Yau manifolds and mirror symmetry - Past, Present and Future - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Iritani
2. 発表標題 On decompositions of quantum cohomology D-modules
3. 学会等名 Virtual ICM 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Iritani
2. 発表標題 Fourier transformation in GLSM
3. 学会等名 Geometry of GLSMs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroshi Iritani
2. 発表標題 On decompositions of quantum cohomology D-modules
3. 学会等名 Japan forum associated with ICM (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 入谷 寛
2. 発表標題 ガンマ予想とトロピカル幾何
3. 学会等名 第66回代数数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Iritani
2. 発表標題 Equivariant quantum cohomology
3. 学会等名 Special Geometry, Mirror Symmetry and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Iritani
2. 発表標題 Equivariant quantum cohomology
3. 学会等名 Arithmetic algebraic geometry and mathematical physics, in honor of the 60th birthday of Professor Atsushi Moriwaki (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Iritani, Hiroshi
2. 発表標題 Gamma conjecture for Fano and Calabi-Yau manifolds
3. 学会等名 Strings and QFTs for Eurasian time zone (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroshi Iritani
2. 発表標題 Quantum cohomology of blow-ups: a conjecture
3. 学会等名 Online Nottingham algebraic geometry seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Hiroshi Iritani https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~iritani/ Hiroshi Iritani https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~iritani/index_ja.html
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 Periods in mirror symmetry	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Workshop on Mirror Symmetry and Related Topics, Kyoto 2022	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Online Workshop on Mirror symmetry and Related Topics, Kyoto 2021	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Online Workshop on Mirror Symmetry and Related Topics, Kyoto 2020	開催年 2020年～2020年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	Stanford University	University of Southern California	
英国	University of Edinburgh		
ブラジル	PUC-Rio		
フランス	IMJ-PRG		
英国	Imperial Collodge London	The University of Edinburgh	

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Columbia university	University of Southern California		
ロシア連邦	Higher School of Economics			
英国	The University of Edinburgh			
米国	University of Southern California	Columbia University	University of Oregon	
中国	数学高等研究院			