様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　５月２９日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ０３５８４

研究課題名（和文）漸近的対称アインシュタイン空間の構成と一意性の研究

研究課題名（英文）Construction and uniqueness of asymptotically symmetric Einstein spaces

研究代表者
松本　佳彦（MATSUMOTO, Yoshihiko）

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：００７１０６２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：与えられた幾何学的な無限遠境界について対応する「漸近的対称アインシュタイン空間」を構成する、「アインシュタイン充填」の問題に関連する事項について研究を行った。これは高エネルギー物理学や微分幾何学において「バルク境界対応」ないし「ホログラフィー原理」とよばれるアイデアに関連する。当初の目標とした事項は相当部分が継続的な検討を要する内容として残ったが、その一方で、研究の経過に伴って生じた2つの問題について一定の成果が得られた。これらの成果については論文を執筆するとともに、国内外の研究集会において発表や討議を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本課題で実施した研究は純粋数学に属するもので、近い未来に実用的な意味で社会に役立つことは期待しづらい。しかし、人類の共有する知的地平を広げるという点において意義がある。ひいては、国際社会において日本が文化的な敬意を得ることにも、多少の貢献があるかもしれない。
学術的には、世界的にみて新しく、国内外の研究者と協力して発展させられる可能性のある、将来にわたる研究の題材を提供したものと信ずる。また、物理学には何らかの形で直接的な影響をもたらす可能性もあると期待される。

研究成果の概要（英文）：I conducted research related to the "Einstein filling problem," which is the problem of constructing the corresponding "asymptotically symmetric Einstein spaces" for a given geometric asymptotic boundary. This project is connected to the idea known as "bulk-boundary correspondence" or "holographic principle" in high-energy physics and differential geometry. While many of the initially set goals remain as topics requiring continued examination, certain results have been achieved regarding two issues that arose during the course of the research. These achievements were documented in papers and presented and discussed at both domestic and international research conferences.

研究分野：微分幾何学

キーワード：微分幾何学　漸近的対称空間　アインシュタイン計量　共形幾何学　CR幾何学

１．研究開始当初の背景

「バルク境界対応」とか「ホログラフィー原理」とよばれる考え方がある。たいへん大雑把にいうと、境界つき多様体において、よい状況設定を与えると、内部（バルクという）と境界とのあいだで幾何学・解析学的性質に密接な関係が生じるという主張である。「バルク境界対応」や「ホログラフィー原理」という言葉は、もともと高エネルギー物理学で使われはじめたのだが、ここでは物理学でよく考察される設定（後述する）だけを指す語としてではなく、その数学的類似物を総称する語としてこれらを用いることにする。

上記の意味での数学的な「バルク境界対応」のある枠組みにおいて、バルクとなる空間が「漸近的対称 Einstein 空間」である。これには、下表のとおりさまざまな「タイプ」が存在する。

漸近的対称 Einstein 空間のタイプ	モデル空間	境界の幾何構造（共形無限遠）
AH（漸近的双曲）	実双曲空間	共形構造
ACH（漸近的複素双曲）	複素双曲空間	CR（Cauchy–Riemann 構造）
AQH（漸近的四元数双曲）	四元数双曲空間	四元数接触構造
⋮	⋮	⋮

表の見出し部に書いたとおり、境界の幾何構造は（ないしその幾何構造を備えた境界そのものは）「共形無限遠」とよばれる。「無限遠」という言葉が使われるのは、バルクが非コンパクトな完備 Riemann 多様体だからである。上記のとおり、空間のタイプに応じて、共形無限遠に備わる幾何構造の種類も異なる。

表の一番上にある AH-Einstein 空間と共形構造の対応がもっとも単純なケースであり、これが（正確にはその不定値計量版が）高エネルギー物理学で扱われる対応である（Maldacena の「AdS/CFT 対応」）。一方で、数学的にはすべてのケースが興味深い。とくに ACH-Einstein 空間は、複素幾何学で自然に現れるある種の Kähler-Einstein 空間を（具体的には Stein 多様体の有界強擬凸領域に Cheng–Yau [6]の計量を与えた空間を）一般化するものとみなすこともできる。

さて、バルク境界対応に関してもっとも基本的なのが、漸近的対称 Einstein 空間の存在と一意性の問題である。これは通常、「指定された共形無限遠について、対応する漸近的対称 Einstein 空間が存在するか、また存在するならば一意的か」という一種の Dirichlet 境界値問題として定式化される。これを以下では「(漸近的対称) Einstein 充填の問題」と言い表す。

Einstein 充填の問題は、「バルク境界対応の第 0 番目の問題である」ということができよう。というのは、バルク境界対応を考える舞台の存在を問うものだからである。この問題には Graham–Lee による 1991 年の論文[9]以来(見方によっても多少異なるが)の一定の歴史がある。しかしながら、この問題は非常に困難なものとしても関連研究者には認識されており、近年でも本質的進展を生みつつも、さまざまな素朴な問いが未解決のまま残っている。Einstein 充填の問題の核心に触れるためには、なお新たな視点を提案し、試行錯誤をする必要がある。

２．研究の目的

本研究課題の目的は、次の二つの問いに答え、それを通じて漸近的対称 Einstein 充填の問題に新たな展開をもたらすことである。

(1) 大きな対称性をもつ AH-Einstein 空間の系統的構成がいくつか知られているが、他のタイプの漸近的対称 Einstein 空間についても類似の構成があるか。またそれらは、Einstein 充填の一意性に関して、新たな知見をもたらすか。

(2) 異なるタイプをもつ漸近的対称空間の連続的な族がある。たとえば、複素双曲空間がある AH-Einstein 空間の族の極限になっていることが知られている。そのような族について、幾何解析的問題(幾何学的な微分方程式に関係する諸問題)の一様な取り扱いはできるか。またそれは、Einstein 充填の存在へと応用されるか。

３．研究の方法

上記「２．研究の目的」の(1)について、AH-Einstein 空間の場合に知られている構成法には以下のようなものがある。

- AdS Schwarzschild 計量（Hawking–Page [11]による）
- Dehn 手術による構成（Anderson [3]および Craig [7]による）
- 偶数次元開球のユニタリ不変な AH-Einstein 計量（Pedersen [16]および松本[12]による）

各々について、ACH やその他のタイプにおける類似の構築を試みる。

「２．研究の目的」の(2)については、Graham–Lee [9]、Andersson [4]、Biquard [5]たちが 2000 年頃までに得た、個別のタイプの漸近的対称空間における線型微分方程式に関する基礎理論を、タイプの「遷移」が起こるような空間の族に対して一般化し、幾何学的な非線型微分方程式の解の構成へと応用することを目指す。
さらに、以上の事項との関連が見込まれる周辺事項についても研究を行う。
国内外の研究集会に参加して情報収集や成果報告を行い、また研究協力者との討議を実施しつつ、自身による検討を進め、ここで述べたことを実施する。

４．研究成果

(1)　大きな対称性をもつ漸近的対称 Einstein 空間の系統的構成の試み

コロナ禍の初期であった 2020 年度は、おもに当時大阪大学に在籍していた丸亀泰二氏（現在は電気通信大学)、竹内有哉氏（現在は筑波大学）と議論しながら研究を実施した。その年の 6 月に、松本が東京大学における集中講義をオンラインで担当し、AH 空間における解析学について講義する機会を得たのだが、その準備をかねた勉強会を丸亀氏・竹内氏とともに数回開き、その中で本研究課題の問題意識の一部についても詳しく説明した。その結果、丸亀氏から、AdS Schwarzschild 型の構成手法について新しい知見を教示いただけた。この手法は AH-Einstein 空間についてはよく知られているが、丸亀氏によれば ACH-Einstein 空間の場合にも同じ手法が一定程度適用可能である。しかし、AH の場合にこれを通じて観察できる非一意性の現象が、ACH の場合にはみられない。ACH-Einstein 空間に対する非一意性には、これ以外の手法を用いて迫る必要があることがわかった。
Anderson [3]と Craig [7]による Dehn 手術にもとづく AH-Einstein 空間の構成法においては、双曲空間の商として得られるカスプ特異点をもつ AH-Einstein 空間から出発し、カスプ近傍を取り去り、その部分に別の多様体を貼りつけることで穴を埋め、貼りつけの際に生じる誤差を修正することで、再度 Einstein 方程式を正確にみたす空間を得る。ここで実は、貼りつける多様体を作成する際に AdS Schwarzschild 型の構成に似た手法を利用する。ACH-Einstein 空間にも Dehn 手術にもとづく構成法を導入するならば、貼りつける多様体を作成する手法の開発が必要だが、ここで前述の丸亀氏の手法を利用しようと考えることは自然である。しかし、さらなる細部の検討を補助事業期間中に終えることはできなかった。
ユニタリ不変な AH-Einstein 計量の構成手法についても、そのほかのタイプの空間に適用するための基礎的な調査を実施したが、手法を実行にするために必要な、複雑な計算に基づく本格的な検討を補助事業期間中に行うことはできなかった。

(2)　異なるタイプをもつ漸近的対称空間の連続族に関する幾何解析的問題の系統的取り扱い

この項目については、補助事業期間以前に進めた予備的な考察があった。異なるタイプをもつ漸近的対称空間の連続族について、適切な関数空間を「一様な」形で設定する必要があるが、他の事例において同様の目的で利用されている手法に、考察している幾何学的な空間の「ブローアップ」を行うというものがある。ただし本研究課題の状況では、有望と考えられたあるブローアップの仕方をすると、それに付随する「モデルプロブレム」の解析が困難となることが判明していた。
それがブローアップの仕方が不適切であるためなのか、より本質的な困難であるのかを見極めるために、既知の「AH-Einstein 空間の族の極限として複素双曲空間が現れる」という状況について、空間遠方における漸近展開の振る舞いがいかなる意味で「連続」であるのか調査することが考えられた。本事業ではその調査に取り組んだ。しかしながら、漸近展開の振る舞いに何らかの意味での「連続性」を見出すことはできていない。
本項目については、研究協力者の R. Mazzeo 氏（スタンフォード大学）と 2023 年 8 月に討議し、引き続き取り組みを続けていくことを確認した。

(3)　CR 構造に関する Bernstein–Gelfand–Gelfand 構成の性質の調査

ここからは、「２．研究の目的」で取りあげた事項への応用をにらみつつ、関連事項として研究した内容に関する成果を述べる。
ACH-Einstein 空間について、その無限遠境界に誘導される CR 構造への「放物幾何の理論」の適用を詳細に調査した。「放物幾何の理論」は 1920 年代の É. Cartan による研究に始まり、1960 年代に田中昇が発展させた分野で、さまざまな微分幾何学的構造を統一的に扱う手法を与える。漸近的対称 Einstein 空間との密接な関係も予想されるが、この関係は現時点では、限定的な状況（具体的には AH-Einstein 空間のとき）を除いてよく調べられていない。本事業において、ACH-Einstein 空間の性質と関係する（より詳しくいえば「障害テンソル」の性質に関連する）「CR Killing 作用素」が、放物幾何の理論の、とくに Bernstein–Gelfand–Gelfand 構成とよばれる枠組みを用いてどのように位置づけられるかを解明し、論文を執筆した[14]。

この内容については、国内で数回講演を行ったほか、2022 年 6 月にフランスで開催された研究集会で報告した。

(4) 写像の繰り込みエネルギーを用いた共形測地線の特徴づけ

(3)の最後に触れた 2022 年 6 月の研究集会の際に、参加していた R. Gover 氏（オークランド大学）から、共形測地線とよばれる特別な曲線群の特徴づけに関する Fine–Herfray の結果[8]について教示を受けた。彼らは共形測地線を、AH-Einstein 空間の極小曲面を用いて特徴づけている。より正確には「繰り込み面積の臨界点」を用いた特徴づけであって、この「繰り込み面積」ないしその臨界点については、Graham–Witten [10]、Alexakis–Mazzeo [1, 2]などの研究がある。

ただし上記の結果を ACH や AQH など他のタイプへと展開していくことを考えたとき、「繰り込み面積の臨界点」を用いた特徴づけには、計算の煩雑さをはじめとする一定の困難があるように思われた。そこで AH の場合に関する別の方法として、「繰り込みエネルギーの臨界点」を用いる方法を考案した。さらに研究を進め、不定値共形計量をもつ多様体における共形測地線も含めた記述が得られることも判明した。

以上の内容について補助事業期間中に論文の原稿をまとめた（その後、2024 年 4 月にプレプリントとして公開した[15]）。また 2023 年 7 月に中国、8 月にアメリカ、9 月に京都で開催された国際研究集会に参加し、内容を発表した。とくに中国で行われた集会では、この研究について、隣接分野の研究者とのあいだで、研究協力について具体的に討議した。

ここで述べた共形測地線に関する研究を発展させるにあたっては、(3)で述べた内容を援用することも見込まれる。

(5) その他

このほか、主として補助事業期間以前に取り組んだ「ACH-Einstein 空間によい概複素構造を付与する」という問題について、論文の改訂作業等を行い、本事業期間中に論文を出版した[13]。

また、ACH 空間における Ricci フローの研究に関して、研究協力者とのあいだで予備的な議論を数回にわたり行った。

〈引用文献〉

[1] S. Alexakis and R. Mazzeo, Renormalized area and properly embedded minimal surfaces in hyperbolic 3-manifolds, *Commun. Math. Phys.* **297** (2010), 621–651.

[2] S. Akexakis and R. Mazzeo, Complete Willmore surfaces in H^3 with bounded energy: boundary regularity and bubbling, *J. Differential Geom.* **101** (2015), 369–422.

[3] M. T. Anderson, Boundary regularity, uniqueness and non-uniqueness for AH Einstein metrics on 4-manifolds, *Adv. Math.* **179** (2003), 205–249.

[4] L. Andersson, Elliptic systems on manifolds with asymptotically negative curvature, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), 1359–1388.

[5] O. Biquard, *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques*, Astérisque **265** (2000), vi+109.

[6] S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), no. 4, 507–544.

[7] G. Craig, Dehn filling and asymptotically hyperbolic Einstein manifolds, *Comm. Anal. Geom.* **14** (2006), 725–764.

[8] J. Fine and Y. Herfray, An ambient approach to conformal geodesics, *Commun. Contemp. Math.* **24** (2022), no. 3, Paper No. 2150009, 27 pp.

[9] C. R. Graham and J. M. Lee, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball, *Adv. Math.* **87** (1991), no. 2, 186–225.

[10] C. R. Graham and E. Witten, Conformal anomaly of submanifold observables in AdS/CFT correspondence, *Nuclear Phys. B* **546** (1999), no. 1–2, 52–64.

[11] S. W. Hawking and D. N. Page, Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983), 577–588.

[12] Y. Matsumoto, A construction of Poincaré-Einstein metrics of cohomogeneity one on the ball, *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (2019), no. 9, 3983–3993.

[13] Y. Matsumoto, Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds, *Pacific J. Math.* **314** (2021), 375–410.

[14] Y. Matsumoto, *The CR Killing operator and Bernstein-Gelfand-Gelfand construction in CR geometry.* プレプリント（https://arxiv.org/abs/2205.11022 から入手可能）

[15] Y. Matsumoto, *Renormalized energy of proper maps and conformal geodesics.* プレプリント（https://arxiv.org/abs/2404.02895 から入手可能）

[16] H. Pedersen, Einstein metrics, spinning top motions and monopoles, *Math. Ann.* **274** (1986), 35–59.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Yoshihiko Matsumoto	４．巻 314
２．論文標題 Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 375-410
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2021.314.375	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　7件／うち国際学会　5件）

１．発表者名 松本佳彦
２．発表標題 On prolongation and the normal tractor connection for contact manifolds with compatible almost CR structures
３．学会等名 大阪大学幾何セミナー
４．発表年 2021年

１．発表者名 松本佳彦
２．発表標題 The CR obstruction tensor and Bernstein-Gelfand-Gelfand operators in CR geometry
３．学会等名 東京工業大学幾何セミナー（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 Yoshihiko Matsumoto
２．発表標題 The CR Killing operator and the BGG construction in CR geometry
３．学会等名 Geometric Structures, Compactifications, and Group Actions（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名
松本佳彦

２．発表標題
The CR Killing operator and the Bernstein-Gelfand-Gelfand construction in CR geometry

３．学会等名
東京大学複素解析幾何セミナー（招待講演）

４．発表年
2022年

１．発表者名
松本佳彦

２．発表標題
CR Killing作用素とBernstein-Gelfand-Gelfand構成

３．学会等名
日本数学会2022年度秋季総合分科会

４．発表年
2022年

１．発表者名
Yoshihiko Matsumoto

２．発表標題
Renormalized energy of maps and conformal geodesics

３．学会等名
Geometric Analysis（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名
松本佳彦

２．発表標題
写像の繰り込みエネルギーと共形測地線

３．学会等名
日本数学会2023年度年会

４．発表年
2023年

１．発表者名
松本佳彦

２．発表標題
写像の繰り込みエネルギーと共形測地線

３．学会等名
Workshop on Complex geometry in Osaka

４．発表年
2023年

１．発表者名
Yoshihiko Matsumoto

２．発表標題
Renormalized energy of maps and conformal geodesics

３．学会等名
Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference 2023（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名
Yoshihiko Matsumoto

２．発表標題
Renormalized energy of maps and conformal geodesics

３．学会等名
Joint Japan/US Collaborative Workshop on Geometric Analysis（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名
Yoshihiko Matsumoto

２．発表標題
Holography in conformal and CR geometry

３．学会等名
Analysis, Geometry and Stochastics on Metric Spaces（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Yoshihiko Matsumoto
http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~matsumoto/
松本佳彦（researchmap）
https://researchmap.jp/ymatz

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	スタンフォード大学	シアトル大学		
中国	上海科技大学			