

令和 5 年 5 月 23 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03597

研究課題名(和文) グラフの対称性を実現する空間埋め込みのトポロジー

研究課題名(英文) Realizations of graph symmetries through spatial embeddings

研究代表者

池田 徹 (Ikeda, Toru)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：00325408

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：(1) デーン手術を用いて、空間埋め込みを通じたグラフ対称性の3次元球面の対称性による実現問題を肯定的に解決した。また、実現可能な対称性を持つ二つのグラフの直積の対称性について実現可能条件を示した。
(2) 3次元多様体上の向きを反転する有限巡回群作用が基本的3次元多様体上のsurgery descriptionの対称性によって可視化されることを示した。
(3) グラフの対称性を実現する3次元球面内の空間グラフの双曲化可能条件を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、グラフの対称性を3次元球面内で実現する空間埋め込みを構成する方法を提案し、実現可能条件を明らかにすることに成功した。また、3次元多様体上の有限群作用や、双曲幾何構造についての関連研究を行った。これらの研究成果により、3次元多様体上の有限群作用の研究において、デーン手術理論の有用性を確認できた。また、空間グラフ理論はグラフ理論と3次元多様体論の交錯領域にあり、立体化学と関連する分野である。このため、これらの分野の相乗効果が高まり、実学分野への応用理論が発展することが期待される。

研究成果の概要(英文)：(1) Using the Dehn surgery theory, we affirmatively solved the problem of realizing graph symmetries by 3-sphere symmetries through spatial embeddings. Moreover, we presented a realizability condition for the symmetry of the Cartesian product of two graphs with realizable symmetries.
(2) We proved that orientation-reversing finite cyclic group actions on 3-manifolds are visualizable by symmetries of their surgery descriptions on some basic 3-manifolds.
(3) We showed the hyperbolizability condition for spatial graphs in the 3-sphere realizing graph symmetries.

研究分野：3次元多様体論

キーワード：3次元多様体 デーン手術 空間グラフ 有限群作用

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

空間グラフはグラフ理論と3次元多様体論の交錯領域にある研究対象であり、立体化学などの実学分野への応用が高いことから活発に研究されている。また、3次元多様体論では双曲構造の研究に関する大きな潮流があり、外部空間が双曲多様体になるような空間グラフである双曲空間グラフに関する研究が知られている。

空間グラフの対称性に関する研究動機の一つに、グラフの対称性を空間埋め込みを通して3次元球面の対称性で実現できるかという問題がある。この問題に関する多くの先行研究では、メビウス梯子、完全グラフ、3連結グラフ、完全2部グラフ等の代表的なグラフについて、有限群の3次元球面への標準的作用のもとで集合として不変になるように3次元球面内に配置する議論を採用している。このため、グラフの特徴に応じた個別の議論を展開せざるを得ず、直積などのグラフ演算に関する応用が困難であった。これに対してデー手術理論を用いた解決の方向性が示されていたが、3次元球面内の surgery description の対称性による可視化が確認されている3次元多様体の対称性は、向きを保つ有限巡回群作用による対称性に限られていた。

2. 研究の目的

本研究では、デー手術理論などの3次元多様体論の手法を用いて、グラフの対称性の実現問題や3次元多様体の対称性の可視化問題を解決し、双曲幾何との関連性を明らかにするため、下記項目について研究を行うことを目的とした。

- (1) デー手術理論を用いて、グラフの対称性を実現する汎用性の高い方法を構築し、グラフの演算との関係を調べる。
- (2) 向き付け可能閉3次元多様体上の向きを反転する有限群作用の surgery description を構築する。
- (3) グラフの対称性を実現する3次元球面内の空間グラフの双曲化可能性を調べる。

3. 研究の方法

- (1) グラフの対称性を与える自己同型群の有限部分群については、4次元直交群の有限部分群に同型なものを研究対象とする。グラフの構造に基づいてグラフの対称性を拡張可能な向き付け可能閉3次元多様体を構成し、同変デー手術により3次元球面上の空間グラフを得る方法を構築する。また、この構成方法を利用してグラフの演算との関連を調べる。
- (2) 向きを反転する有限巡回群作用を考える。特異集合が非分離閉曲面を含む場合が生じるため、3次元球面における可視化だけでなく、2次元球面上の円周束などの基本的3次元多様体における可視化も含めて議論する。特異集合内の閉曲面については、同変デー手術によって連結和や圧縮を行う方法を考える。
- (3) グラフの対称性を与える自己同型群の有限部分群については、3次元特殊直交群の有限部分群に同型なものを研究対象とし、それに対応する3次元球面上の対称性は標準的線形作用で与

えられるものを考え、実現の可能性を調べる。

4. 研究成果

(1) グラフ上の有限群作用を、そのグラフをコアとするハンドル体のダブルに拡張し、同変デーン手術によって3次元球面上の作用で不変な空間埋め込みを得る方法を確立した。そして、特異集合の実現条件と、特異集合によるグラフの分離条件を満たす場合に、問題を肯定的に解決した。また、二つのグラフの対称性が3次元球面上の向きを保つ有限群作用によって特異集合と交わらない空間埋め込みを通して実現されるとき、それらのグラフの直積も実現可能であることを示した。

(2) 向き付け可能閉3次元多様体上の向きを反転する有限巡回群作用の特異集合は、特異絡み目、特異曲面および孤立特異点で構成される。先行研究による整数係数の同変デーン手術を用いた特異絡み目の解消・生成方法に加え、本研究では整数係数または半整数係数の同変デーン手術を用いた特異曲面の圧縮方法を確立した。そして、任意の向き付け可能閉3次元多様体の向きを反転する巡回対称性は、基本的3次元多様体に設定した3種類の対称性モデルのいずれかで記述できることを示した。

(3) 準備的研究として、向き付け可能閉3次元多様体上の向きを保つ有限群作用に対して、与えられた特異集合を持ち、与えられたオイラー標数の条件を満たし、集合として不変な双曲的空間グラフの存在を示した。その応用として、1点目の成果と組み合わせることにより、グラフの対称性の実現の双曲化可能条件がオイラー標数で与えられることを明らかにした。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

| | |
|---|-------------------------------|
| 1. 著者名 Ikeda Toru | 4. 巻 282 |
| 2. 論文標題 Realization of graph symmetries through spatial embeddings into the 3-sphere | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Topology and its Applications | 6. 最初と最後の頁 107313 ~ 107313 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2020.107313 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号） | 所属研究機関・部局・職 （機関番号） | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|