

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 30 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03601

研究課題名(和文) 結び目や3次元多様体の量子不変量の漸近挙動

研究課題名(英文) Asymptotic behaviors of quantum invariants of knots and three-manifolds

研究代表者

村上 斉 (Murakami, Hitoshi)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：70192771

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：量子不変量とは、リー環とその表現に付随した、3次元多様体や結び目・絡み目の不変量である。本研究では、基本的な量子不変量である色付きジョーンズ多項式とWitten-Reshetikhin-Turaev不変量に着目し、反復トーラス結び目とトーラス結び目のDehn手術で得られる閉3次元多様体に対してこれらの不変量を計算し、その漸近挙動を考察した。どちらの場合にも、結び目補空間の基本群の $SL(2;C)$ 表現に対応した、Chern-Simons不変量とReidemeister torsionが現れることが示された。この結果は、体積予想とその一般化、さらには3次元多様体版体積予想を裏付けるものである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

結び目の体積予想やその3次元多様体版は、量子不変量と幾何的不変量を結びつけようとするものである。近年の研究により、これらの予想は低次元トポロジーを含む幾何学のみならず、代数学や解析学とも深いかわりを持っていることが次第に明らかになってきた。さらに理論物理学にも大きな影響を与えている。このことから、この予想の解決に向けて具体的な傍証を与えることは大きな意義があると考えられる。本研究では、トーラス結び目のDehn手術で得られた3次元多様体と、反復トーラス結び目という限定された対象ではあるが、双曲多様体では現れない興味深い現象が得られたことは大いに意義がある。

研究成果の概要(英文)：The quantum invariants are invariants for knots/links and for three-dimensional manifolds, associated with a Lie algebra and its representation. In this research, we consider the colored Jones polynomial and the Witten-Reshetikhin-Turaev invariant, which are basic quantum invariants, calculated those invariants for iterated torus knots and for closed three-manifolds obtained by Dehn surgery along torus knots, and studied their asymptotic behaviors. In both cases, there it was shown that there appear the Chern-Simons invariant and the Reidemeister torsion associated with a representation of the fundamental group to $SL(2;C)$. These results support the volume conjecture and its generalizations, and the three-manifold version of the volume conjecture.

研究分野：量子位相幾何学

キーワード：体積予想 量子不変量 Chern-Simons 不変量 Reidemeister torsion 結び目 3次元多様体 色付きジョーンズ多項式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

結び目とは、3次元ユークリッド空間に埋め込まれた円周のことであり、複数の結び目が絡んだものを絡み目と呼ぶ。また、3次元多様体とは局所的に3次元ユークリッド空間と同一視できる空間のことである。

リー環とその表現(抽象的なリー環を、よく知られている正方行列に写したもの)に対応して、結び目や絡み目の量子不変量を定義することができる。それは q をパラメータとするローラン多項式(負幂も許した多項式)に値を持つ。最も基本的なものはリー環 $sl(2;C)$ (複素係数2次正方行列で対角成分の和が0となるもの全体)に対応したもので色付き Jones 多項式 $J_M(K;q)$ と呼ばれ、表現の次元 N によって定まる(K は結び目や絡み目)。 q に1の N 乗根を代入したものは $J_M(K; \exp(2\pi i/N))$ は N についての複素数列とみなせる。 $J_M(K; \exp(2\pi i/N))$ の N のときの漸近挙動を調べることで、結び目補空間の体積が得られるのではないかと体積予想が、2001年に村上順と研究代表者によって提出された。これは1997年にR. Kashaevによって提唱された予想を一般化したものである。

また、3次元多様体の量子不変量(Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量)は、まず3次元多様体を、絡み目の Dehn 手術(絡み目の環状近傍(中身の詰まったドーナツと同相)を引き抜いて、別の方法で埋め戻すことによって3次元多様体を得る方法)で表し、そこに現れた絡み目の量子不変量を表現ごとに足し合わせることで定義される。これは複素数に値を持つ不変量である。2015年にQ. Chen と T. Tian は、Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量のある種の漸近挙動が、その多様体の体積を決定するのではないかと、体積予想の3次元多様体版ともいえる予想を提出した。

どちらの予想もこれまでいくつかの例に対して証明されているだけで、完全な証明からはほど遠いのが現状であった。一方、理論物理学者はどちらの予想に対しても肯定的な立場であるため、数学者の間でも予想は正しいものと認識されているのであるが、厳密な証明は大変難しいようである。

以上が研究開始当初の背景である。

2. 研究の目的

究極的には結び目と3次元多様体に関する体積予想を解決することを目標としているが、上記のような現状に鑑み、具体的な結び目、絡み目、3次元多様体に対して体積予想およびその一般化を証明するのが本研究の目的である。

特に、本研究ではトラス結び目を反復することで得られる結び目(反復トラス結び目)や、トラス結び目の Dehn 手術で得られる閉3次元多様体の体積予想について考察する。図1左は、 $(2, 2a+1)$ 型トラス結び目を表し、図1右は、 $(2, 2a+1)$ 型トラス結び目の環状近傍(トラスと同相)に $(2, 2b+1)$ 型トラス結び目を乗せて得られる反復トラス結び目を描いてい

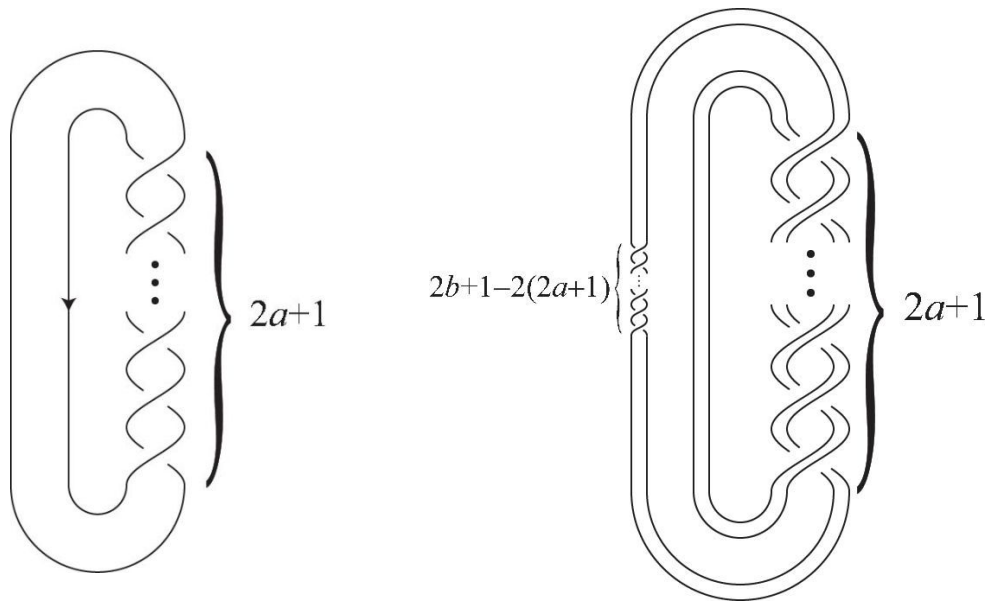


図 1

る．なお本研究では $(2,2a+1)$ 型だけではなく， (p,q) 型トーラス結び目（図 1 では縦方向に 2 回，横方向に $2a+1$ 回，回っているが，これを縦に p 回，横に q 回にしたもの）の Dehn 手術で得られる 3 次元多様体も考察する．

まず，これらの結び目の色付き Jones 多項式や Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量の漸近挙動を調べたうえで，そこに現れるであろう量の位相的な意味を調べる．結び目・絡み目の補空間（3次元ユークリッド空間からこれらの図形を除いた空間）や 3 次元多様体の基本群から，リー群 $SL(2;\mathbb{C})$ （複素係数 2 次正方行列で行列式が 1 のもの全体）への表現と，それに付随する Chern-Simons 不変量や twisted Reidemeister torsion と関係することが期待される．

以上が本研究の目的である．

3．研究の方法

反復トーラス結び目の色付き Jones 多項式の明示的な公式は知られている．それを利用することで q が 1 の N 乗根の場合の色付き Jones 多項式が二重総和の形で与えられる．Poisson の和公式を利用してこれを積分に置き換えた上で鞍点法を利用することで漸近挙動が得られる．一方 Chern-Simons 不変量と Reidemeister torsion の公式はすでに論文「H. Murakami, The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of a twice-iterated torus knot, *Acta Math. Vietnam.* 39 (4) (2014) 649-710. MR 3292589」と「H. Murakami, The twisted Reidemeister torsion of an iterated torus knot, *Topol. Appl.* 257 (2019) 22-66. MR 3916903」で得られているのでそれらを利用して Kashaev 不変量の漸近挙動と Chern-Simons 不変量や Reidemeister torsion との関係が得られることが期待される．ここで，Chern-Simons 不変量とは，3 次元多様体の基本群から，リー群 $SL(2;\mathbb{C})$ への表現に対応して微分幾何的に得られる不変量であり，Reidemeister torsion とは，同じく基本群からリー群 $SL(2;\mathbb{C})$ への表現でひねることで得られるチェイン複体の torsion のことである．どちらの不変量も基本群から $SL(2;\mathbb{C})$ への表現によって定まることから，上述の漸近挙動は表現に関する和の形で現れることが期待される．

一方，トーラス結び目の Dehn 手術で得られる 3 次元多様体の Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量については，各表現に対応する色付き Jones 多項式の公式はわかっているのでそれらの和の形で Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量を得られる．これも二重総和で与えられるので，Poisson の和

公式で積分に直して鞍点法を用いることで漸近挙動が得られる．Chern-Simons 不変量と Reidemeister torsion については知られていないので個別に対応する必要がある．

以上が本研究の方法である．

4．研究成果

米国テキサス大学ダラス校の A. Tran 氏との共著論文「Quantum invariants of three-manifolds obtained by surgeries along torus knots, *Quantum Topol.* **13** (2022), no. 4, 691-795」においては，トーラス結び目の整数係数手術で得られる閉 3 次元多様体の，代表的な量子不変量である Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量の漸近挙動を研究した．その結果，基本群の $SL(2;C)$ への様々な表現(可換表現，既約表現)に対応した Chern-Simons 不変量と Reidemeister torsion が現れることがわかった．これは J. Andersen による漸近展開予想を，これまでに知られていなかった場合に解決したものと考えられる．また，Q. Chen と T. Yang による体積予想の 3 次元多様体版との関係から見ても新たな知見を与えるものである．

同じく Tran 氏との共著論文「Kashaev invariants of twice-iterated torus knots, *Topology Appl.* 290 (2021), Paper No. 107602, 20 pp. MR4199848」では，ある種の反復トーラス結び目の Kashaev 不変量 ($J_M(K; \exp(2i))$ のこと) の漸近挙動を調べ，体積予想の一般化を証明した．実際，反復トーラス結び目の Kashaev 不変量の漸近挙動には，基本群の様々な $SL(2;C)$ 表現に対応する Chern-Simons 不変量と Reidemeister torsion が現れることが示された．もともとの体積予想の観点から見ると，反復トーラス結び目の体積は 0 なので，Kashaev 不変量が高々多項式発散をすることは予想されていたのであるが，研究代表者らが提唱した体積予想の一般化に鑑みると Chern-Simons 不変量(体積の複素化)や Reidemeister torsion が現れたことは大いに意味がある．

以上が本研究の成果である．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

| | |
|--|-------------------------------|
| 1. 著者名 Murakami Hitoshi、Tran Anh T. | 4. 巻 13 |
| 2. 論文標題 Quantum invariants of three-manifolds obtained by surgeries along torus knots | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Quantum Topology | 6. 最初と最後の頁 691 ~ 795 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/QT/175 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |
| 1. 著者名 Fuji Hiroyuki、Iwaki Kohei、Murakami Hitoshi、Terashima Yuji | 4. 巻 386 |
| 2. 論文標題 Witten-Reshetikhin-Turaev Function for a Knot in Seifert Manifolds | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics | 6. 最初と最後の頁 225 ~ 251 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-03953-y | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Murakami Hitoshi、Tran Anh T. | 4. 巻 290 |
| 2. 論文標題 Kashaev invariants of twice-iterated torus knots | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Topology and its Applications | 6. 最初と最後の頁 107602 ~ 107602 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2021.107602 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |
| 1. 著者名 Beliakova Anna、Hikami Kazuhiro | 4. 巻 33 |
| 2. 論文標題 Non-semisimple invariants and Habiro's series | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Topology and Geometry : A Collection of Essays Dedicated to Vladimir G. Turaev | 6. 最初と最後の頁 161 ~ 174 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/IRMA/33-1/10 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Murakami Hitoshi | 4. 巻 76 |
| 2. 論文標題 The colored Jones polynomial of the figure-eight knot and a quantum modularity | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Canadian Journal of Mathematics | 6. 最初と最後の頁 519 ~ 554 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S0008414X23000172 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 4件)

| |
|---|
| 1. 発表者名 K. Hikami |
| 2. 発表標題 3-manifolds and quantum modular forms |
| 3. 学会等名 AMS spring western virtual sectional meeting: special session "q-series, number theory, and quantum topology" (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---------------------------------|
| 1. 発表者名 樋上和弘 |
| 2. 発表標題 入門: モックテータ関数とムーンシャイン |
| 3. 学会等名 早稲田整数論セミナー (招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 藤博之 |
| 2. 発表標題 行列模型と位相的漸化式 |
| 3. 学会等名 Aspects of Mirror Symmetry 2022 (招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 K. Hikami |
| 2. 発表標題 Quantum invariants, q-series, DAHA |
| 3. 学会等名 Number Theory, Strings, and Quantum Physics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---------------------------------|
| 1. 発表者名 樋上和弘 |
| 2. 発表標題 モックモジュラー形式と量子モジュラー形式 |
| 3. 学会等名 東北大学理学部数学科談話会 (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 村上斉 |
| 2. 発表標題 The colored Jones polynomial of the figure-eight knot |
| 3. 学会等名 Low dimensional topology and number theory XIII (招待講演) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 K. Hikami |
| 2. 発表標題 DAHA and skein algebra on surfaces |
| 3. 学会等名 Zoom Cluster online seminar organized by Michigan State University (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 K. Hikami |
| 2. 発表標題 Braid group and cluster algebra |
| 3. 学会等名 GeMAT online seminar, organized by Simon Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 樋上和弘 |
| 2. 発表標題 モックテータ関数 |
| 3. 学会等名 数学協会, 東京大学素粒子物理国際研究センター, 四日市大学関孝和数学研究所 主催 (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Kazuhiro Hikami |
| 2. 発表標題 Skein algebra, cluster algebra, DAHA |
| 3. 学会等名 東北クラスターセミナー (招待講演) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 藤博之 |
| 2. 発表標題 On a generalization of the Masur-Veech volume via two dimensional gravities |
| 3. 学会等名 Topics on mathematical structures in string theory (招待講演) |
| 4. 発表年 2024年 |

〔図書〕 計1件

| | |
|--------------------------|-----------------|
| 1. 著者名 村上 斉 | 4. 発行年 2022年 |
| 2. 出版社 日本評論社 | 5. 総ページ数 208 |
| 3. 書名 結び目のはなし [新装版] | |

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|-----------|--|------------------------------------|----|
| 研究 分担者 | 樋上 和弘 (Hikami Kazuhiro) (60262151) | 九州大学・数理学研究院・准教授 (17102) | |
| 研究 分担者 | 藤 博之 (Fuji Hiroyuki) (50391719) | 大阪工業大学・情報科学部・教授 (34406) | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| | |
|---------|---------|
| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|