

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03605

研究課題名（和文）3次元トポロジーのべき零的研究

研究課題名（英文）Nilpotent study of 3-dimensional topology

研究代表者

野坂 武史（Nosaka, Takefumi）

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号：00646903

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000 円

研究成果の概要（和文）：研究計画どおりに研究を進め一定の成果を得、加えて副産的な結果が得られた。まず計画通り、結び目のメタべき零的研究を進め、結び目の不変量を構成した。このモノドロミーにシンプレクティック性を見出す為、Foxペアリングという高次の交叉形式に着目し結果を得た。他方で、ジョンソン準同型の対数に着目し、“指数可解的な元”に限定する事で、対数の定義範囲を既存のものより拡張する事が出来た。そして結び目の補空間の基本群の群準同型から、捻れAlexander多項式の定義拡張を目指した。ここで代数 K_1 群が鍵となった。本研究も代数トポロジーの手法を影響下に、低次元トポロジーの研究を推進させた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

トポロジーの技術や手法は多くの分野に応用をもたらしている。私は2と3次元多様体に関して応用する研究を行っている。当研究分野において、群のべき零性やコホモロジーを用いた研究が今まで幾つかあるが、本研究はその潮流に進展を目指したもので学術的に意義がある。また結び目理論（空間内のひもの絡み方の研究）や写像類群の分野にも関連する。また本研究は代数トポロジーの手法やアイデアを基にし、コホモロジー論やホモトピー論の技術を活用し、トポロジー内の横断的な理論発展を目指すものである。

研究成果の概要（英文）：These years, as the research project document which I submitted to JSPS in 4 years ago, I partially succeeded the project. Precisely, I defined some topological invariants of knots, which are defined as rationally nilpotence of knot groups, and studied theses properties. Here, the idea is based on the mapping class group and the Johnson homomorphism. I also studied Fox pairings of some Poincare duality group, and gave exponentially solvable logarithms of the Johnson homomorphism. In addition, for a group homomorphism from any knot group to any group, I also made an extension of the twisted Alexander polynomial, in terms of K_1 group.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：トポロジー 3次元多様体 群のコホモロジー 結び目 写像類群

1. 研究開始の当初の背景

私は幾何学・トポロジーのうち、3次元多様体を主に研究対象にしている。多様体の位相的不変量を得るために、低次元トポロジーと代数トポロジー等の手法を幾つか用い研究を遂行している。その中で、本研究の目標は、“メタベキ零”的な設定から、多くの不変量を構成する事である。古典的には、アーベル的な設定から多くの研究があった(例えば Alexander 多項式, Blanchfield 双対)。一方で、可解群の議論に帰着する既存の研究もあった。しかし可解は一般に非常に難しく、被覆空間の指数定理や vonNeumann 環など高度な技術を要した。一方で、群のコホモロジーを低次元トポロジーに適用する場面も多々ある為、適用する整備も期待されていた。

2. 研究の目的

本研究では、その古典的な手法やアイディアに基づいて、可解とアーベルの中間物として、メタベキ零的な一般化と理論発展を目論んだ。具体的には3つの試みを申請書で提案した。その3つから、定量的で計算可能な量をどう取り出し、どう応用を捻出するかである。また、低次元トポロジーに群のコホモロジーを適用するべき状況になった場合、理論整備をし汎用性を伸ばす目的もあった。

3. 研究の方法

トポロジーの分野では、メタベキ零の先行研究も多くはないため、メタベキ零の理論展開や副残物的結果に期待した。その上、メタベキ零商は多くの手法が使える、定量的に扱いやすい。例えば、ベキ零商では中心拡大が現れ、中心の基底を考察する事で、群コホモロジーの議論に持ち込みやすい。具体的には次の3つの方法を考えた。

一つに、結び目理論の Alexander 多項式をメタベキ零化する事である。ここでポイントは準局所環性と代数 K_1 群を用いながら、Alexander 多項式を Novikov 環と対数を用い定義し、代数 K_1 群の手法で理論展開を目指す。

二つに、指数的可解性の性質を援用する。メタベキ零商の圏内でどう指数写像が扱いやすくなるか、を検討した。

三つに、FOX 微分や恒等子などの群コホモロジーの技術を、メタベキ零商の研究に適用する方法をとった。特に、メタベキ零に現れる双対性や対称性を記述する為に、群コホモロジーを援用する。

4. 研究成果

以下の5つの出版論文の通り、成果を得る事が出来た。各論文ごとに簡単な解説をする。

- A solvable extended logarithm of the Johnson homomorphism, Journal of Topology and Analysis, 2024

写像類群からの全ジョンソン写像に関して、Log(対数)を定義する方法は幾つか知られている。Goldman-Turaev 双リー代数へと結びつける話題でもある。但し、その対数は写像類群の全体には今でも定義されていない。本研究では指数型可解 Lie 群の視点から、Log の定義域を拡張する方法を提示した。既知の対数の定義は「写像類のホモロジー上の固有値がすべて1」というクラスに限られていたが、今回の“指数可解的”は或る程度広いクラスに拡張された事が本研究の利点である。なお対数を定義する際に、代数的な議論ではなく、可解 Lie 群の解析的な性質を用いる点に独創性がある。

- Fox pairings of Poincare duality groups, to appear Hokkaido Mathematical Journal

自己同型群にシンプレクティック性を見出すときには、Fox ペアリングという高次の交叉形式が鍵となる事がわかった。Fox ペアリングの代数的な先行研究は幾つかあったが、当論文ではポアンカレ双対性をもつ群に焦点を当て、群コホモロジーの言葉で Fox ペアリングの新しい研究方法を提唱した。さらに“高次 Fox ペアリング”も提唱し、任意の次元の結び目に対し、基本となる高次 Fox ペアリングが存在する事も示した。

- Cellular chain complexes of universal covers of some 3-manifolds, Journal of Mathematical Sciences The University of Tokyo

M をコンパクトで境界の無い 3 次元多様体とする. M の普遍被覆空間の胞体複体をもし記述できれば, 幾つかの既存の位相的不変量が計算できる. 例えば, 局所係数付きホモロジー (アレクサンダー加群や多項式) や捩れライデマイスタートーションがある. そこで本論文では 3 次元多様体の普遍被覆空間における胞体複体の記述を与えた. ここでのアイディアは 50 年前から知られている群コホモロジーの Fox 微分と恒等子である. 恒等子の記述する方針は知られていたが, これまで適用された多様体は素程おおくなかった. そこで本論文では 6 種類ほどの閉 3 次元多様体で恒等子を与え, その普遍被覆空間の胞体複体を記述した. その系として, Dijkgraaf-Witten 不変量や Linking 形式の計算例を与える事が出来た.

- Twisted Alexander invariants of knot group representations, Tokyo J. Math. Advance Publication 1-22 (2021).

Twisted Alexander invariants of knot group representations II computation and duality, Topology and its Applications, Available online 16 December 2020

結び目 $K \subset S^3$ の Alexander 多項式は長い歴史があり, 興味深い性質や応用例や発展例など多くある. 21 世紀以降では Alexander 多項式の捩れ版 (つまり基本群の線形表現による捩れ) が Lin や Wada により導入され, 類似した性質や応用例も発見されていた. 加えて Cochran や Harvey により非可換係数の Alexander 多項式も導入された (しかし計算例や諸性質が少なかった). 他方で, Milnor により Reidemeister 捩れを K_1 -群に値をとらせ拡張する仕事がある.

この二つの論文では, それに乗じて, 任意の群と結び目群からの準同型に対して, K_1 -群 (正しくはその或る商群) に値をもつ Alexander 多項式を定義した. 本研究では K_1 群の計算や当多項式の定量的の情報抽出を部分的ながら与える事が出来た. 詳述すると, Pajitnov の Log を用いる事で, K_1 -値捩れ Alexander 多項式の非自明な例を与えた. またその Alexander 多項式は, (少々弱い条件を課し, 結び目群に限って) 上記の Wada, Lin, Cochran, Harvey らの設定を含んでいる事が確かめた. 他に, 巡回有限被覆空間の Reidemeister 捩れを当の K_1 -値捩れ Alexander 多項式からの再現し, また K_1 -値捩れ Alexander 多項式における双対性も示す事が出来た.

また以上の 5 論文以外に, 4 つのプレプリントを本期間内に作成する事が出来た.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takefumi Nosaka	4. 巻 29
2. 論文標題 Cellular Chain Complexes of Universal Covers of Some 3-Manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Math. Sci. Univ. Tokyo	6. 最初と最後の頁 89-113
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nosaka Takefumi	4. 巻 58(2)
2. 論文標題 Meta-nilpotent quotients of mapping-torus groups and two topological invariants of quadratic forms	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 351-365
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bakshi Rhea Palak, Ibarra Dionne, Mukherjee Sujoy, Nosaka Takefumi, Przytycki Jozef H.	4. 巻 552
2. 論文標題 Schur multipliers and second quandle homology	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 52 ~ 67
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2019.12.027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nosaka Takefumi	4. 巻 Available online 16
2. 論文標題 Twisted Alexander invariants of knot group representations II; computation and duality	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107533 ~ 107533
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2020.107533	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nosaka Takefumi	4. 巻 50
2. 論文標題 Twisted cohomology pairings of knots III; triple cup products	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 207 - 222
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32917/hmj/1595901628	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nosaka Takefumi	4. 巻 45
2. 論文標題 Twisted Alexander Invariants of Knot Group Representations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3836/tjm/1502179346	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nosaka Takefumi	4. 巻 1
2. 論文標題 A solvable extended logarithm of the Johnson homomorphism	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 1 ~ 14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793525324500079	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 野坂 武史
2. 発表標題 Meta-nilpotent knot invariants and symplectic automorphism groups of free nilpotent groups
3. 学会等名 日本数学会 2021 年秋季総合分科
4. 発表年 2021年

1．発表者名 野坂 武史
2．発表標題 ポアンカレ双対群の Fox ペアリング
3．学会等名 日本数学会 2022 年春季総合分科
4．発表年 2022年

1．発表者名 野坂 武史
2．発表標題 べき零的結び目不変量と写像類群のジョンソン準同型
3．学会等名 日本数学会 2022 年春季総合分科（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 野坂 武史
2．発表標題 幾つかの3 次元多様体の普遍被覆空間のセル複体
3．学会等名 日本数学会2020 年度秋季総合分科
4．発表年 2020年

1．発表者名 野坂 武史
2．発表標題 $SL_2(\mathbb{R})$ -Casson 不変量とライデマイスタートーション
3．学会等名 日本数学会2020 年度秋季総合分科
4．発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------