

令和 5 年 6 月 16 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03612

研究課題名(和文) 指標多様体上の幾何と写像類群作用を用いた算術的クライン群の分類

研究課題名(英文) The geometry of character variety and classification of arithmetic Kleinian groups

研究代表者

山下 靖 (Yamashita, Yasushi)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：70239987

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：2次元および3次元の多様体の幾何構造として、双曲幾何構造は重要である。この構造を理解するため、2次元多様体の基本群の指標多様体の研究を行った。特に、2つの $SL(2, \mathbb{C})$ の要素によって生成されるクライン群において、その生成元の位数が有限の場合について、算術的クライン群とよばれる代数的・幾何的に興味深いものとして、どのようなものが存在するかに関する研究を行った。研究へのアプローチとして、特に計算機実験を援用する方法を採用し、従来では扱うことが難しかった問題を効果的に扱うことに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

現代の位相幾何学における主要な研究対象である図形に多様体とよばれるものがあり、それらがどのような形の変形を許容するのかという問題にアプローチすることは、数学の研究を進める上で基本的な意義がある。さらに、算術性などの代数的な手法や写像類群の作用という力学系との関係を明らかにすることにより、分野間の新たなつながりの解明に貢献した。また、本研究は手法としては計算機実験を特徴としており、計算機の応用領域を数理科学に広げるといった形での意義もある。

研究成果の概要(英文)：Hyperbolic geometry is an important geometric structure for manifolds of dimension 2 and 3. To understand this structure, we studied index manifolds of the fundamental group of 2-dimensional manifolds. In particular, we studied algebraically and geometrically interesting Klein groups generated by two elements of $SL(2, \mathbb{C})$, which are called arithmetic Klein groups when the number of degrees of the generators is finite.

As an approach to the research, we adopted a method that uses computer experiments in particular, and succeeded in effectively dealing with a problem that was difficult to deal with by conventional methods.

研究分野：位相幾何学

キーワード：双曲幾何学 クライン群

1. 研究開始当初の背景

曲面 S の基本群 $\pi_1(S)$ からリー群 G への表現全体の空間 $\text{Hom}(\pi_1(S), G)$ には、 G が共役により作用する。この作用による幾何学的不変式論の意味での商空間 $X = \text{Hom}(\pi_1(S), G) // G$ を指標多様体という。 X を、表現の像が G の離散部分群になる領域とそうでない領域に分割すると、前者は S の幾何構造の変形の空間とみなすことができ、重要な研究対象である。(幾何的分解) また、 X には写像類群が自然に作用し、この作用の複雑さ(エルゴード性)によっても X は2つに分解される。(力学系的分解) 2つの分解はタイヒミュラー空間論およびクライン群論において注目を集めつつあるが、それらを具体的に求めることは一般には困難であり、両者の包含関係なども未解決の点が多い。

リー群として $G = \text{SL}(2, \mathbb{C})$ を考えると、幾何構造は3次元双曲構造となる。表現の像が G 内の非自明な離散部分群になる最も基本的な例にモジュラー群 $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ がある。これを自然に一般化した算術的クライン群は、代数的・幾何的・解析的に非常に興味深い離散部分群である。本研究課題ではこの算術的クライン群の分類を、幾何構造と写像類群作用を用いたアプローチで行う。

2. 研究の目的

本研究では、曲面が1つ穴あきトーラスまたは3つ穴あき球面、すなわち基本群 $\pi_1(S)$ が(生成系を固定した)2元生成自由群 $F_2 = \langle X, Y \rangle$ であり、リー群 G が $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の場合を考える。 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の離散部分群をクライン群とよび、 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限位数の元を楕円型とよぶ。生成元が楕円型であるような2元生成の算術的クライン群(以下、2元生成楕円型算術的クライン群)は高々有限個であることが Maclachlan-Martin によって示された。そこで、それらをすべて列挙せよ、という問題が考えられる。また、 p, q を2以上の整数とし、指標多様体 $X = \text{Hom}(F_2, \text{SL}(2, \mathbb{C})) // \text{SL}(2, \mathbb{C})$ の要素 $[X], [Y]$ で、生成元 X, Y の像 $[X], [Y]$ の位数がそれぞれ p, q (すなわち楕円型)であるものの集合を $X_{p,q}$ とする。 $X_{p,q}$ は複素平面と同一視され、上に書いた意味で、幾何的および力学系的な分解を許容する。本研究課題では期間内に以下の2点を行うことにより、算術的クライン群さらには双曲多様体の研究を大きく進展させると共に新たに指標多様体の幾何学を切り拓くことを目的とした。

A) 2元生成楕円型算術的クライン群の分類を行う。

B) $X_{p,q}$ における幾何的および力学系的分解の包含関係を求める。

複素平面 $X_{p,q}$ においてどの点が2元生成楕円型算術的クライン群を与えるのかを、幾何的および力学系的分解を用いて調べるのが、上のA, Bの関係であり、本研究の特徴である。

3. 研究の方法

Maclachlan-Martin の研究により、分類がなされていないのは2つの位数が6以下の場合のみになっていて、これに順に取り組みことになる。それぞれの場合の研究方法について簡単に述べる。

代数的な条件により候補となる2元生成楕円型クライン群が実際に算術的であることを示すために、幾何的分解のための Keen-Series による(放物型のための)方法論を $X_{p,q}$ に拡張する。 $p=3, q=3$ の場合には本研究代表者が Series 氏, Tan 氏との共同研究で解決していて、その方法を他の場合にも拡張する。 $p=3, q=3$ の場合に我々の方法で実際に算術的なものがちょうど127個存在することなどを計算機実験により確かめた。

また、代数的な条件により候補となる2元生成楕円型クライン群が算術的ではないことを示すためには、指標多様体の力学系的分解を使う。上で述べた Bowditch による分解は生成系の選び方に依存するため、必要な選択を行うことと、力学系的分解と幾何的分解の包含関係の解明(本研究の目的B)が課題となるが、これも $p=3, q=3$ の場合には計算機実験が成功しているため、これを拡張することとした。

それぞれのステップにおいて、研究課題を達成するために本欄で述べた国内外の関連研究者を中心に議論を行うとともに、必要な図書の購入などを行うこととした。

4. 研究成果

1年目は、 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の部分群で楕円型の元2つによって生成されるクライン群で、算術的とよばれる条件をみたすものの分類のための研究を行った。楕円型の元はその位数で特徴づけるこ

とができるが、特に位数が6以下の場合において、どのような算術的クライン群が存在しうるかについて、計算機を用いた実験を行った。クライン群は指標多様体のパラメータを用いて記述され、それが算術的になるためにはそのパラメータが代数的整数であって四元数代数等に関する一定の条件をみたす必要があることが知られている。さらに、指標多様体上の写像類群作用に関して、BowditchのQ条件というものをみたさなければならないことが予想されている。そのため、これらに関する計算機実験を進めることで、算術的クライン群の完全分類に向けた候補を与えるための研究を進展させた。

楕円型の元はその位数で特徴づけることができるが、特に位数が2, 3の場合の研究をこれまで行ってきたが、これを進めて6以下の場合において、どのような算術的クライン群が存在しうるかについて、計算機を用いた実験を進展させることができた。クライン群は指標多様体のパラメータを用いて記述され、それが算術的になるためにはそのパラメータが代数的整数であって四元数代数等に関する一定の条件をみたす必要があることが知られている。さらに、指標多様体上の写像類群作用に関して、BowditchのQ条件というものをみたさなければならないことが予想されている。これらに関する計算機実験を、位数が6以下の場合において進展させることができた。

2年目は、 $SL(2, \mathbb{C})$ の部分群で楕円型の元2つによって生成されるクライン群で、算術的とよばれる条件をみたすものの分類のための研究を継続した。楕円型の元はその位数で特徴づけることができるが、特に位数が6以下の場合において、どのような算術的クライン群が存在しうるかについて、計算機を用いた実験を継続した。クライン群は指標多様体のパラメータを用いて記述され、それが算術的になるためにはそのパラメータが代数的整数であって四元数代数等に関する一定の条件をみたす必要があることが知られている。さらに、指標多様体上の写像類群作用に関して、BowditchのQ条件というものをみたさなければならないことが予想されている。そのため、これらに関する計算機実験を様々なパラメータについて進めることで、算術的クライン群の完全分類に向けた候補を与えるための研究を進展させた。

楕円型の元はその位数で特徴づけることができ、特に位数が2, 3, 4の場合の研究をこれまで行ってきたが、これを進めて5, 6の場合において、どのような算術的クライン群が存在し得るかについて、計算機を用いた実験を進展させることができた。クライン群は指標多様体においてトレースを用いたパラメータで記述され、それが算術的なものに対応するためには、そのパラメータが代数的整数であって、四元数代数等に関する一定の条件をみたす必要があることが知られている。さらに、指標多様体上の写像類群作用に関して、BowditchのQ条件とよばれるものをみたすことが予想されている。これらに関する計算機実験を、位数が5, 6の場合において進展させることができた。

3年目は、 $SL(2, \mathbb{C})$ の部分群で楕円型の元2つによって生成されるクライン群で、算術的とよばれる条件をみたすものの分類のための研究を継続した。楕円型の元はその位数で特徴づけることができるが、特に位数が6以下の場合において、どのような算術的クライン群が存在しうるかについて、計算機を用いた実験を継続した。クライン群は指標多様体のパラメータを用いて記述され、それが算術的になるためにはそのパラメータが代数的整数であって四元数代数等に関する一定の条件をみたす必要があることが知られている。さらに、指標多様体上の写像類群作用に関して、BowditchのQ条件というものをみたさなければならないことが予想されている。そのため、これらに関する計算機実験を様々なパラメータについて進めることで、算術的クライン群の完全分類に向けた候補を与えるための研究を進展させた。

特に、Riley slice および関連した空間における計算を進展させ、研究発表を行った。さらに、双曲多角形に関連して得られるクライン群の計算結果について、研究発表を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Martin Gaven, O'Brien Graeme, Yamashita Yasushi	4. 巻 29
2. 論文標題 Random Kleinian Groups, II Two Parabolic Generators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 443 ~ 451
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/10586458.2018.1477079	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 山下靖
2. 発表標題 Computer experiments on Mobius transformations and random Kleinian groups
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会（招待講演）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------