

令和 6 年 5 月 18 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03616

研究課題名（和文）幾何学的不変量による周期的極小曲面のモジュライ空間の研究

研究課題名（英文）Study of the moduli space of periodic minimal surfaces by means of geometric invariants

研究代表者

庄田 敏宏（Shoda, Toshihiro）

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：10432957

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：界面活性剤の数学的モデルである三重周期的な極小曲面全体のモジュライ空間の構造を三種類の幾何学的不変量、即ち、Morse指数・退化次数・符号数によって説明するというのが本研究課題の主となる部分である。

本期間中においては特に種数3の場合を考察し、まず、1990年代に物理学で考察されていた助変数3の変形族であるmPCLP/mDCLP族の幾何学的不変量を計算することに成功した。次に、モジュライ空間の境界にはBolza曲面と呼ばれている種数2の閉曲面による元があるが、その元の周辺の幾何学的不変量を計算することができ、モジュライ空間の境界の局所的な状況を説明することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

界面活性剤という実際に現実の世界に存在する膜が何故その形状をとるのかという疑問が常にある。先述の通り、三重周期的な極小曲面は界面活性剤の数学的モデルである。一方、微分幾何学においては自然現象はある特定の幾何学的不変量の値をとる場合に該当すると考えられている。このことから、幾何学的不変量を計算することによって三重周期的な極小曲面全体の集合の構造を解明することは、自然現象の原理を解明するという学術的および社会的な意義がある。

研究成果の概要（英文）：A triply periodic minimal surface is a mathematical model of surfactant, and our main theme in this period is to study the moduli space of triply periodic minimal surfaces by means of three kinds of geometric invariants, namely, the Morse index, the nullity, the signature.

We first focus on the genus three case, and computed the three quantities for the mPCLP/mDCLP family, which is a three parameter family and which have been studied in physics in 1990s. Next, we consider a boundary of the moduli space via the Bolza surface which is the genus two classical closed surface. We determined the three quantities around the boundary, and find a local structure of the boundary of the moduli space.

研究分野：微分幾何学

キーワード：三重周期的な極小曲面 Morse指数 退化次数 符号数 安定性

## 1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間内の三重周期的な極小曲面は界面活性剤の膜の数学的モデルであることが知られており、物理・化学・結晶学等、様々な自然科学の分野で研究されている。例えば、多くの変形族が構成されており、そのグラフィックスも与えられている。自然現象は何らかの最小値・最大値をとるという見方が自然科学の解釈であるが、曲面の面積の最小性を用いてこうした現象を記述するというのが微分幾何学の視点である。特に、その極小曲面が面積最小の状態からどれだけ離れているかを記述する、Morse 指数・退化次数という幾何学的不変量が古典的な道具である。現在では、より計算しやすい、符号数と呼ばれる幾何学的不変量が江尻典雄氏によって導入されている。

一般に、 $n$ 次元平坦トーラス内のコンパクトな極小曲面全体のモジュライ空間の定式化は主に二つあり、一つは Arezzo-Pirola によって 1999 年に確立された変形理論を用いたもの、もう一つはこの 20 年間で江尻氏によって確立された極小曲面の Morse 指数・退化次数・符号数を用いたものである。前者は退化次数の情報しか考慮しておらず、後者の理論の方が微分幾何学的情報を多く含んでいる。しかもそれら幾何学的不変量の計算アルゴリズムも与えている。そこで本研究は後者の理論を基に進めるものとする。

$n$ 次元平坦トーラス内のコンパクトな極小曲面の具体例における Morse 指数や退化次数の計算は、Montiel-Ros(1991 年)と Ross(1992 年)による特殊な例に対する結果以外は知られておらず、その他の具体例に関する成果は、国内外を問わず、この約 30 年間で一つもなされなかった。しかし、江尻氏の理論をいくつかの具体例の変形族に適用した 2018 年の江尻・庄田による論文で、 $n$  が 3 で種数が 3 の場合の幾何学的不変量を計算できることが実証された。このことから、その他の変形族における幾何学的不変量の計算が自然な課題となる。

次に、3次元平坦トーラス内の Morse 指数 1 の極小曲面全体の集合  $M$  に関する研究を計画したが、これには以下のような経緯がある。本研究の主題は自然現象を数式で記述することであり、物理等で三重周期的な極小曲面が研究されている数学的根拠は体積保存安定性にあると考えられている。したがって、3次元平坦トーラス内の体積保存安定な極小曲面全体の集合の構造を知りたい。体積保存安定な極小曲面は Morse 指数 1 で種数 3 であることが Ros によって 2006 年に示されている。種数 3 の場合の Morse 指数の計算方法は上述の論文で確立したので、 $M$  の構造を調べる方が容易であると考えた。また、Morse 指数 1 の極小曲面がいつ体積保存安定になるかということも重要な視点である。これに対しては 2018 年の江尻・庄田による論文で扱った、種数 3 の変形族の中で Morse 指数が 1 のものの体積保存安定性を調べ、すべて体積保存安定であることを 2019 年に示した。一方、Ritore-Ros による結果で、体積保存安定な極小曲面全体の集合はコンパクトであることが示されており、体積保存安定な極小曲面の変形族を  $M$  の境界まで伸ばしていけば、境界の手前のどこかで体積保存安定性が崩れることが判る。しかし、その符号数の動きは不明であり、幾何学的不変量を通して  $M$  の境界の構造を調べるといふ研究は世界的にも着手されてこなかった。

## 2. 研究の目的

$n$ 次元平坦トーラス内のコンパクトな極小曲面全体のモジュライ空間は様々な連結成分に分解される。その境界は  $n$  を越える退化次数をもつ極小曲面たちで構成され、各々の連結成分上では退化次数が  $n$  であり、Morse 指数や符号数が一定値をとる。したがって、こうした幾何学的不変量を計算することにより、極小曲面の具体例およびその変形族の、モジュライ空間における挙動を調べることができる。このことから、第一にこれまでに扱ってこなかった種数 3 の三重周期的な極小曲面の変形族に対して幾何学的不変量を計算する。特に、これまで助変数 1 の変形族のみを考察してきたのであるが、助変数が多い変形族を扱う。より次元の高い変形族の幾何学的不変量を計算することにより、三重周期的な極小曲面全体のモジュライ空間の構造を広く知ることができる。次に、 $M$  の境界の構造を幾何学的不変量を通して解明することも重要な目的である。

## 3. 研究の方法

幾何学的不変量を計算するためには、その極小曲面を与える閉 Riemann 面において標準ホモロジー基底を具体的に決定し、それに沿った第二種微分(留数が 0 となるような有理型微分)の周期を計算する必要がある。これには特殊技術が必要となるが、閉 Riemann 面の形が複雑であればあるほど、その処理は困難である。助変数が多い変形族として、物理学の論文で与えられている  $mPCLP/mDCLP$  族という助変数 3 の変形族を扱うことになったが、想定通り、かなり困難があるプロセスとなった。また、 $M$  の境界の研究についてであるが、2019 年に、納谷信氏との共同研究によって、閉曲面上におけるラプラシアン(ラプラス)の最小正固有値に対する等周問題に関する予想を解決した。その過程で、Bolza 曲面と呼ばれる種数 2 の閉 Riemann 面が Morse 指数 1 であることを示したのであるが、種数 3 の閉 Riemann 面を退化させれば種数 2 の閉 Riemann 面となるので、Bolza 曲面は  $M$  の境界に含まれる。このことから、種数 3 で Morse 指数 1 の極小曲面の変

形族で、Bolza 曲面に退化するものを構成することを本研究で取り組むことにした。具体的には、Bolza 曲面に適切なハンドルを付けた種数 3 の閉 Riemann 面を構成し、その幾何学的不変量を計算するというものである。

#### 4. 研究成果

ソフトマターの主流となる研究対象として gyroid という種数 3 の三重周期的な極小曲面が 1970 年に A. Schoen によって発見され、1990 年代に物理学者らによって、gyroid を含むような助変数 1 の変形族である rG 族、tG 族というものが構成された。本研究において rG 族および tG 族の幾何学的不変量を特定することができたというのが最初の成果である。これは MDPI によるオープンアクセス査読付き国際誌「Mathematics」に掲載された。また、mPCLP/mDCLP 族という助変数 3 の変形族において、その幾何学的不変量を計算することに成功した。これによって、モジュライ空間において 3 次元分の構造を決定することができた。この結果は査読付国際誌である Hokkaido Mathematical Journal に掲載された。

次に、M の境界の研究については、Bolza 曲面に適切なハンドルを付けた種数 3 の閉 Riemann 面を具体的に設定し、その幾何学的不変量を計算することによって、Bolza 曲面による境界の近傍では Morse 指数が 1 になることを示し、符号数も特定することができた。この結果は論文にまとめて、現在、投稿中である。

さらに、分岐理論に関する成果も得られた。これは当初の計画にはなかったことであるが、研究自体は 2018 年に小磯深幸氏、Paolo Piccione 氏との共同研究に関連した内容である。極小曲面の変形族において、退化次数が  $n$  よりも大きいところから、別の変形族が枝分かれして発生するという現象が多々ある。しかし、退化次数が  $n$  よりも大きいところすべてでそのような現象が起こるわけではなく、そのような枝分かれが発生するところとそうでないところの違いを調べる必要があった。この課題に対して、特異点論の横断性定理を利用して、2018 年の江尻・庄田で扱った変形族において、枝分かれする箇所としない箇所を分類することができた。この結果は論文にまとめて投稿中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Norio Ejiri and Toshihiro Shoda	4. 巻 51
2. 論文標題 The geometric invariants for mPCLP/mDCLP family	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 487--530
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14492/hokmj/2020-411	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ejiri Norio, Shoda Toshihiro	4. 巻 8
2. 論文標題 The Existence of rG Family and tG Family, and Their Geometric Invariants	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 1693 ~ 1693
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/math8101693	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 三重周期極小曲面におけるMorse指数と符号数の関係について
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「部分多様体論と幾何解析の新展開」（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 I-WP曲面のMorse指数について
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究集会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 On the non-existence of new families of triply periodic minimal surfaces
3. 学会等名 Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 Moduli theory of minimal surfaces in flat tori
3. 学会等名 RIMS Research Project 2020, RIMS Review Seminar「Symmetry and Stability in Differential Geometry of Surfaces」(招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 Transversal properties for period maps on Moduli space of triply periodic minimal surfaces
3. 学会等名 The 3rd Japan-Taiwan Joint Conference on Differential Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 庄田敏宏
2. 発表標題 閉曲面上におけるLaplacianの最小正固有値に関する等周問題について
3. 学会等名 広島幾何学研究集会 2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

業績リスト

<https://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~tshoda/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------