様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 ２１ 日現在

機関番号：１２１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ０３６２４

研究課題名（和文）不変な半閉部分空間の研究

研究課題名（英文）Research of invariant semiclosed subspaces

研究代表者
平澤　剛（Hirasawa, Go）

茨城大学・理工学研究科（工学野）・教授

研究者番号：１０４３４００２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：無限次元な可分複素Hilbert空間上の任意の有界線形作用素Tに関する非自明で不変な半閉部分空間の集合からなる半順序集合Inv(T)において、Inv(T)が閉部分空間を含むための条件、Inv(T)の鎖が閉部分空間を含むための条件、Inv(T)の極大鎖が閉部分空間を含むための条件、などの考察を行いいくつかの結果を得た。考察過程において、Bourbaki-Kneser の不動点定理やAmmanの不動点定理、Hausdorffの極大鎖定理を援用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
線形代数学は純粋および応用の両面から見ても、現代数学の基盤として位置づいている。本研究が扱っている無限次元な可分複素Hilbert空間の不変部分空間問題は、その基盤的な延長上にあるため、この方面の研究やその成果には学術的意義があると考えられる。さらに、研究成果で援用した定理には汎用性があるため、当該問題に興味をもっている研究者は国内のみならず世界にも多くいると思われ、社会的意義も大きいと考えられる。

研究成果の概要（英文）：In a partially ordered set Inv(T) consisting of a set of non-trivial invariant semiclosed subspaces for any bounded linear operator T on a separable complex Hilbert space, the conditions that Inv(T) contains a closed subspace is considered, the conditions for a chain of partially ordered sets to have a closed subspace and the conditions for a maximal chain to have a closed subspace are argued. Then we obtained some results. In this discussion process, we used Bourbaki-Kneser's fixed point theorem, Amman's fixed point theorem, and Hausdorff's maximal chain theorem.

研究分野：関数解析学（抽象作用素論）

キーワード：半閉部分空間　　不変な半閉部分空間　Uhlmannの補間的作用素平均族　半順序集合　Bourbaki-Kneser の不動点定理　Hausdorffの極大鎖定理

１．研究開始当初の背景

本研究課題は従前からの継続研究の位置づけであるが、大局的な背景としては不変部分空間問題にある。以下、その問題を ISP (Invariant Subspace Problem)と記す。ISP とは「可分な複素 Hilbert 空間上の任意の有界線形作用素は常に非自明で不変な閉部分空間をもつか」という問題である。John von Neumann の活躍した頃に端を発しており、古くから考察され続けているがまだ完全には解決されていない。有限次元や非可算次元の Hilbert 空間の ISP は肯定的に解決されるため、可算次元、すなわち可分 Hilbert 空間の場合が残された問題である。これまでに可分 Hilbert 空間の ISP に関する多くの結果が知られているが、その中でも「サブ正規な有界線形作用素は非自明で不変な閉部分空間をもつ」は有名である。ISP に関する結果は、非自明で不変な閉部分空間が存在するための有界線形作用素への付帯条件に関する考察が多いと思われる。このような流れにおいて、従前から有界線形作用素に条件を課すのではなく Hilbert 空間の‘無限性’に関わるある種の選択関数が、複数の条件を満たすという仮定のもとで考察をしてきた。それらの仮定条件のもとで、半閉部分空間の全体集合がある距離に関して完備となるため、区間縮小法を適用する環境が整う。非自明で不変な閉部分空間を区間縮小法の極限として得ようと従来から考察してきたが、実現には困難な部分もあるため新たな視点を取り入れる必要性を感じていた。これが本研究課題の開始当初の背景である。

２．研究の目的

新しい知見を得て ISP に関する研究の進展に寄与するため、いくつかの視点から研究の目的を述べる。任意の有界線形作用素は不変な半閉部分空間を常に非可算個もつ。その中から１つの閉部分空間を取り出す（創り出す）ことを目標に考察している。１．でも述べたが、当該研究はある種の選択関数がいくつかの条件を満たすという仮定のもと、非自明で不変な閉部分空間を半閉部分空間の区間縮小法の極限として得ようとするものである。そのようなことから、研究目的の１つとして、ある仮定条件を満たす選択関数を設定することで、‘無限性’の困難さの対処方法の模索とその有効性の確認がある。しかしながら、これについては成果をもって目的の達成を確認していく他はないので、実質的な研究目的として、半閉部分空間の path の周辺構造を調べることにあり、特に、適切な単調減少区間列を帰納的に構成することが課題の一つである。本研究課題の従前に科学研究費(H28～H30 年度)の補助を受けたとき、未発表ではあるが「2 つの半閉部分空間が不変ならばその path 上の任意の半閉部分空間も不変である」や「もし適切な単調減少区間列が構成できるならば区間縮小法による極限は不変である」などの知見を得ていた。これらを踏まえつつ Uhlmann の補間的作用素平均族による半閉部分空間の path を用いて、適切な単調減少区間列を帰納的に構成できるかを調査し、進展が困難な部分に関しては新たな視点からも検討考察する。特に、各区間列の両端点を結んでできる path と全順序部分集合（鎖）との関連調査として、汎用性のある Bourbaki-Kneser の不動点定理などを用いた考察を行い、知見の進展を図る。

３．研究の方法

従前からの研究方法や経緯も含めて以下述べる。半閉部分空間の集合には、ある選択関数に基づいた q-距離が定義され、距離空間を完備にするため選択関数が満たすべき条件を課している。半閉部分空間の区間縮小法を考えてきたのは、この設定の恩恵を受けるためである。有界作用素には常に不変な半閉部分空間が多く存在し、その中に閉部分空間を見出すために区間縮小法という存在性を示すことに用いられる定理を基軸として考察してきた。直径がゼロに収束するような単調減少区間列の構成が課題で、各区間の両端点を不変な半閉部分空間になるように選んでいくことで、それらに挟まれながらの区間縮小法の極限として不変な閉部分空間を得る算段である。しかしながら、Uhlmann の補間的作用素平均族による半閉部分空間の path を用いて、区間列を帰納的に構成していくことを策としてきたが、それらの path の性質などを活かしきれないことで研究の進捗が遅遅としていた。その後、両端点の半閉部分空間に包含関係があれば、

それらを結んだ path 上にある 2 つの半閉部分空間どうしも包含関係があることが判明。つまり path が鎖にもなることがわかったことにより、半順序集合上の鎖の性質に焦点を当てて考察していくことで、区間列構成とは別個の新しい知見が加わると考えた。これを踏まえた研究の方法としては、半順序集合上の Bourbaki-Kneser の不動点定理や Hausdorff の極大鎖定理を基軸とした方法となる。特に、後者の極大鎖定理は、極大鎖の存在を保証してくれるものだが、選択公理と同値であることが知られている。「距離空間を完備にするため選択関数が満たすべき条件を課している」と上述したように、選択公理と極大鎖定理が同等的に対応していると考えられることから、選択関数の存在性と極大鎖の存在性が対応していることになり、選択関数が満たすべき仮定条件は、極大鎖が満たすべき仮定条件に対応することになる。これらを動機として、ある条件を満たす極大鎖を考え、それが閉部分空間を含むか否かを考察していくことが、(研究期間途中からの)研究の方法である。

４．研究成果

可分複素 Hilbert 空間上の 2 つの半閉部分空間に包含関係があれば、それらを結んだ Uhlmann 補間的作用素平均族による path 上の半閉部分空間どうしは包含関係があることを示した。つまり鎖となるわけだが、両端点の 2 つの半閉部分空間が有界線形作用素 T で不変であれば、その鎖上のすべての半閉部分空間も T で不変であることもわかる。よって、非自明で不変な半閉部分空間からなる半順序集合 Inv(T)上で鎖を考察していくことが適切と思われる。

まず核心的問題である「Inv(T)が閉部分空間を含むための条件は何か」を考察した。これに関して、Inv(T)が半順序集合として完備ならば閉部分空間を含む、すなわち、T は非自明で不変な閉部分空間をもつことを示した。これは Inv(T)上で定義されたある増加写像を Bourbaki-Kneser の不動点定理に適用することで、その写像の不動点として閉部分空間が得られることによる。また、Inv(T) が完備にならない場合として、１つでも稠密な半閉部分空間を Inv(T)が属せば完備にならないことを Amann の不動点定理を用いて示すことができた。これにより ISP へ取り組みとして「Inv(T)がいつ完備になるか」という問題意義はそれほど大きくはないとの認識に至り、半順序集合 Inv(T)の完備性という大局的性質から局所的に視点を絞り、Inv(T)の１つの鎖が閉部分空間を含むための考察を行うことになる。任意の鎖に対して、そこから定義されるある種の無限可算列を考えると、その下極限集合が空でなければ鎖となることがわかり、その 1/2 乗は自分自身を包含することが示される。従って、下極限集合であるその鎖がもし最大元をもてば、T が不変な閉部分空間をもつことが導かれる。次に、Hausdorff の極大鎖定理から Inv(T) には極大鎖の存在が保障されるが、いつ極大鎖が閉部分空間を含むのかについての周辺考察をした。ここでは、1/2 乗が自分自身を包含しているような鎖を考え、「この条件を満たす極大鎖は常に閉部分空間を含む」という予想を掲げ検討したが、これに関する成果はまだない。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 平澤　剛
2．発表標題 不変な半閉部分空間の半順序集合について
3．学会等名 京都大学数理解析研究所 RIMS共同研究（公開型）再生核ヒルベルト空間を中心とした実解析・複素解析・函数解析の総合的研究
4．発表年 2022年

1．発表者名 平澤　剛
2．発表標題 半閉作用素の弱共役性について
3．学会等名 関数環研究集会
4．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関