

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03634

研究課題名(和文) 拡散過程の到達時刻と標本路から定まる筒形集合に関する研究

研究課題名(英文) The study of the hitting time and the Wiener sausage for diffusion process

研究代表者

濱名 裕治 (Hamana, Yuji)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：00243923

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)： Bessel 過程が時間の平方根のオーダーで原点から遠ざかる点に到達する時刻の分布関数を決定した。その際、radial Ornstein-Uhlenbeck 過程の到達時刻に関する結果を用いることにより具体的な表示を与えることができた。

次に、Brown 運動の球面への到達時刻とそのときの位置の同時密度関数を決定し、それを定数ドリフトをもつ Brown 運動にまで拡張した。

一方、Bessel 過程の到達時刻の分布関数の第3項目を決定し、Bessel 過程の指数に応じて挙動が異なることを示した。また、双曲 Bessel 過程の到達時刻の期待値の漸近挙動を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Ornstein-Uhlenbeck 過程に対する Wiener sausage の体積の期待値は、球の内部の温度が1で外部の温度が0という初期状態で、球の内部の温度を1に保ったままのとき、中心から離れるにしたがって熱が伝わりにくい状況下での球から流出した熱の総量を表す。この期待値の研究のためには、Brown 運動の球面への到達時刻と適当な関数のその時刻までの確率積分の同時分布を調べることが重要であり、本研究は、その前段階として被積分関数が定数の場合についての結果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)： We determined the distribution function of the first hitting time of Bessel process to the square-root boundary and deduced its explicit form by using results on the first hitting time of the radial Ornstein-Uhlenbeck process with suitable parameters.

In addition, we gave the joint density function of the first hitting time and site of Brownian motion with and without a drift.

On the other hand, we gave the third term of the distribution function of the first hitting time of Bessel process and show that its behavior is different according the order of the Bessel process. Moreover we had the asymptotic behavior of the expectation of the hitting time of hyperbolic Bessel process.

研究分野：確率論

キーワード：Wiener sausage Bessel 過程 Ornstein-Uhlenbeck 過程 到達時刻 square-root boundary Brown 運動

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

確率論においては、以前から、ランダム係数の作用素のスペクトル理論が活発に研究されてきた。特に、Poison ポテンシャルをもつランダム Schrodinger 作用素の状態密度関数の Lifshitz tail の研究においては、球を Brown 運動の道に沿って動かしたときに得られる図形 (Wiener sausage とよばれる) の体積およびその一般化の Laplace 変換の漸近挙動が重要な役割を果たすことが指摘され、それを与えるために、大偏差原理という新たな理論がつけられた。その原型は、Kac と Luttinger が行ったランダムに穴をあけた領域での熱方程式の基本解の trace の期待値の挙動の研究にある。

しかし、実際には、Wiener sausage の体積の大偏差原理自体が解決されたのは、ずいぶん後になってからのことである上、現在においてもエントロピー関数は与えられていない。また、Brown 運動以外の確率過程に関しては、安定過程に関して小偏差原理が与えられているだけで、その後の発展は見られなかった。

そこで、定数 drift をもつ Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値を表示し、drift をうまく選ぶことによって、エントロピー関数の候補となるものを与える試みを続けてきた。現在では、この Wiener sausage の体積の期待値の具体的な形が与えられ、さらに、時刻が大きくなるときの挙動が得られている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、確率過程が定める筒型集合、いわゆる Wiener sausage の体積に関する大偏差原理を確立することであり、具体的には次の2点である。

- (1) Brown 運動に対する Wiener sausage の体積のエントロピー関数を決定する。
- (2) Ornstein-Uhlenbeck 過程に対する Wiener sausage の体積の期待値を求める。

3. 研究の方法

- (1) ドリフトをもつ Brown 運動から得られる Wiener sausage の体積の期待値の表示については、すでに特殊関数を含む項をもつ絶対収束する交代級数で与えられることがわかっているため比較的容易に解析できる。変形 Bessel 関数の指数が大きいときの評価を与えることで単調性および連続性を示すことができるものと思われる。
- (2) ピン留め Brown 運動に対する Wiener sausage の体積から得られるエントロピー関数は、ピン留めしない場合のものと同じになることが、離散対応であるランダムウォークの訪問点の個数に関する結果から類推することができるので、Cameron-Martin の公式等確率解析で用いられる手法を使って示す予定である。
- (3) Brown 運動に対する Wiener sausage の体積の期待値の Laplace 変換は、Brown 運動の球面への到達時刻の分布関数の Laplace 変換から求めることができる。その際には Brown 運動の平行移動不変性が本質的に必要である。しかし、多次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程は平行移動不変性をもたないため、Brown 運動の場合に用いた手法を適用することができない。Ornstein-Uhlenbeck 過程は Brown 運動の時間変更で表示できることに着目すると、球面への到達時刻の分布関数を与えるには、Brown 運動の square-root 境界への到達時刻を考察する必要があることがわかる。そこで得られた結果をもとに Laplace 変換を表示し、それを逆変換できる形への変形を試みる。
- (4) Ornstein-Uhlenbeck 過程の球面への到達時刻の分布関数は対応した拡散方程式を解くことによって得られるが、Laguerre 微分方程式が関係することがわかっている。この方程式の解である Laguerre 関数を用いて分布関数を表示する方法も考える。

4. 研究成果

- (1) Brown 運動の径方向の運動は、Bessel 過程とよばれる 1 次元拡散過程の特別なものである。先行する研究より、Bessel 過程の到達時刻の分布関数は変形 Bessel 関数とその零点で表示できることがわかっており、出発点が到達点と比べて原点より遠くにある場合については、その表示を用いて到達時刻の末尾確率の第 2 項目までの漸近挙動も得られている。今回、熊本大学の大学院生と共同で、すでに与えられている分布関数の表示を用いて、第 3 項目の係数を具体的に表示することができ、さらに係数の符号も決定した。この結果は、査読付学術雑誌に掲載された。
- (2) Ornstein-Uhlenbeck 過程は Brown 運動の時間変更で表示することができることを用いると、Ornstein-Uhlenbeck 過程が球面へ到達する時刻は、Bessel 過程が時刻の平方根のオーダーで原点から遠ざかる点へ到達時刻を調べることがポイントとなる。その到達時刻の密度関数を合流型超幾何関数とその第一パラメータに関する零点で表示することができた。そこでは以前に得られていた radial Ornstein-Uhlenbeck 過程の到達時刻の密度関数の結果が重要な役割を果たす。得られた結果は、査読付学術雑誌に掲載された。
- (3) Ornstein-Uhlenbeck 過程の到達時刻の確率分布を調べる際に、Brown 運動の球面への到達時刻と適当な関数のその時刻までの確率積分の同時分布が必要である。本研究では、その到達

時刻とその時刻での Brown 運動の位置の同時分布を考えた。その上で、松本裕行氏との共同研究で、以前に得られていたドリフト付き Brown 運動の球面への到達時刻の密度関数の表示を応用することにより、同時密度関数を具体的に表示することができた。得られた結果は査読付学術雑誌に掲載される予定である。

- (4) Brown 運動の性質が、動く空間によって半径方向の運動がどのようにかかわっているかを調べることも重要な手掛かりになると考えて、実双曲空間上の Brown 運動の球面への到達時刻について、筑波大学の大学院生と共同で研究を行った。残念ながら到達時刻の分布関数の具体形を得るには至らなかったが一定の成果を得た。得られた成果が査読付学術雑誌に掲載されることが決定した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Hamana Yuji	4. 巻 43
2. 論文標題 Square-root boundaries for Bessel processes and the hitting times of radial Ornstein-Uhlenbeck processes	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Opuscula Mathematica	6. 最初と最後の頁 145 ~ 172
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7494/OpMath.2023.43.2.145	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Hamana, Ryo Kaikura, Kosuke Shinozaki	4. 巻 41
2. 論文標題 Asymptotic expansions for the first hitting times of Bessel processes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Opuscula Mathematica	6. 最初と最後の頁 509-537
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7494/OpMath.2021.41.509	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Hamana, Hiroyuki Matsumoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Brownian hitting to spheres	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Hamana, Lujia Zhang	4. 巻 -
2. 論文標題 Hitting times of hyperbolic Bessel processes	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Colloquium Mathematicum	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 Square-root boundaries for Bessel processes
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 Square-root boundaries for Bessel processes
3. 学会等名 マルコフ過程とその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 双曲ベッセル過程の到達時刻について
3. 学会等名 マルコフ過程と関数論（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 双曲ベッセル過程の到達時刻について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 濱名裕治, 松本裕行
2. 発表標題 ブラウン運動の球面への到達時刻と到達位置について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 濱名裕治
2. 発表標題 ブラウン運動の到達時刻と到達位置の末尾確率の漸近展開について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	松本 裕行 (Matsumoto Hiroyuki)		
研究協力者	井ノ口 順一 (Inoguchi Jun-ichi)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------