様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　５ 年　　６ 月 １９ 日現在

機関番号：２４７０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ０３６３６

研究課題名（和文）転送作用素の漸近理論構築による無限グラフを備えた非共形反復関数系の高次漸近解析

研究課題名（英文）Higher-order asymptotic analysis of nonconformal iterative function systems with infinite graphs by asymptotic theory construction of transfer operators

研究代表者

田中　晴喜（Tanaka, Haruyoshi）

和歌山県立医科大学・医学部・講師

研究者番号：６０６４８５６７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：転送作用素の漸近摂動を定式化し，固有値，対応する固有関数，双対作用素の対応する固有ベクトルの漸近展開を与えた．特に，漸近展開の係数を１次の係数から高次の係数へ帰納的に与えていく方法により，固有値の一様スペクトルギャップの条件を必要としない又は弱い条件にできるという特徴がある．応用として，無限有向グラフを備えた非共形（non-conformal）反復関数系から生成される極限集合のHausdorff次元について高次漸近展開を与えた．別の応用として，可算状態をもつopen型の摂動Markovシステムのギブス測度の分裂現象も一部得られた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
関数を漸近展開することにより，近似値を得ることができるという考え方は，線形作用素の固有値および固有ベクトルにも適用することができる．また，漸近展開を行うためだけであれば，可微分性の条件を緩めることもできる．本研究では，これらを転送作用素の中で定式化し，反復関数系から生成される極限集合のHausdorff次元の近似値を求めることで，その有用性を実証した．今後はランダム化や非自励系版などにも適用し，漸近理論の可能性をさらに広げていくことが期待される．

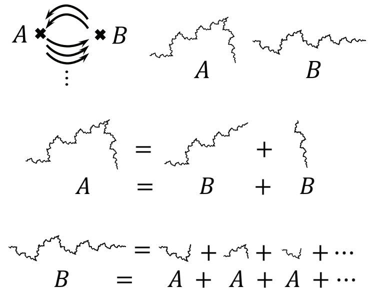
研究成果の概要（英文）：If a transfer operator is asymptotically perturbed, then we give the asymptotic expansions of the eigenvalues, of the corresponding eigenfunctions, and of the corresponding eigenvectors of the dual operator. In particular, by a method of recursively giving the coefficients of the asymptotic expansion, it possible to make the uniform spectral gap condition of the eigenvalues unnecessary or weak. As an application, we give a high-order asymptotic expansion for the Hausdorff dimension of the limit set of non-conformal iterated function systems with an infinite directed graph. As another application, we obtained some splitting phenomena of Gibbs measures for open-type perturbed Markov systems with countable states.

研究分野：数学

キーワード：転送作用素　漸近摂動　反復関数系　漸近分散　擬コンパクト

１．研究開始当初の背景

有向グラフ反復関数系（Graph Iterated Function System）（略して GIFS と書く）は，有限個又は可算無限の枝集合をもつ多重有向グラフと，各枝に付随する写像の族から成っており，反復関数系をグラフをつかって一般化したものである．特に，可算無限グラフの場合，自己相似集合，連分数変換，Schottky 群に加え，Maudlin-Urbański の有向グラフマルコフシステム，非共形リペラーなど広い範囲の力学系を含む．



無限グラフ GIFS の例

GIFS を構成する非拡大写像系 $(T_e)_{e\in E}$ のスモールパラメータ ϵ に関するオーダー n の漸近摂動

$$T_e(\epsilon,\cdot) = T_e + T_{e,1}\epsilon + \cdots + T_{e,n}\epsilon^n + o(\epsilon^n) \qquad (e \in E)$$

を導入し，その GIFS の力学的特性量（極限集合の Hausdorff 次元，同集合上の Gibbs 測度，同測度の測度論的エントロピー，位相的圧力，空げき率など）の ϵ に対する挙動を調べる研究がある．各特性量を高次漸近展開することにより，力学系の特性量への影響を精密に調べることができる．例えば，反復関数系を構成する写像の一つを摂動し次元の変化を調べることにより，写像一つの次元への影響度を調べることができる．また，非共形（non-conformal）な GIFS の場合，次元を Bowen 型の等式から直接求めることができる場合は少なく，上からと下からの評価を別々に与えるケースが多い．次元の計算が可能な GIFS から非共形 GIFS に漸近摂動したときの次元の高次漸近展開を与えることにより，より正確な値の推定が可能になる．

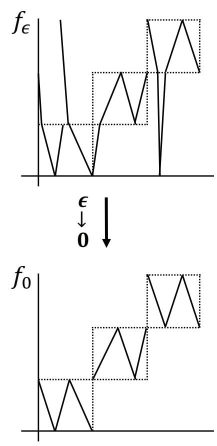
問題点として以下の (1)-(3) がある．

(1) 有限グラフから無限グラフに拡張した際の問題として，**力学的特性量の漸近展開の長さが減る現象**がある．有限グラフの場合は，GIFS を構成する写像が n 次漸近摂動するとき極限集合の次元も n 次漸近挙動するが，無限グラフのときは，たとえ各写像が解析的であったとしても，次元が有限の長さのオーダーの漸近挙動しかもたないことが一般に起こりうる．オーダーの長さも摂動の仕方によって連続性（0 次の漸近挙動）から解析的な範囲までさまざまに変化しうる．このような問題があるため，力学的特性量の導出に使う Ruelle 転送作用素に対し既存の一般解析摂動論を用いることができず，新たな漸近摂動理論を構築する必要がある．

(2) **一様 Lasota-Yorke 型不等式に関する条件**は，転送作用素の固有値を摂動安定させるための条件であり，多くの摂動問題で課されている．例えば，正規化された Ruelle 転送作用素 $\mathcal{L}_\epsilon$ については，関数 f の Lipschitz 定数を $[f]_\theta$，一様ノルムを $\|f\|_\infty$ と表す場合，

$$[\mathcal{L}_\epsilon^n f]_\theta \le c\|f\|_\infty + \theta^n [f]_\theta \quad (\text{すべての 複素数値 Lipschitz 連続関数 } f,\ \epsilon > 0,\ n \ge 1)$$

と記述される（$c > 0$ と $\theta \in (0,1)$ は定数）．同不等式の下では，Gouëzel と Liverani (Ergod. Theory Dyn. Syst. 26 (2006), 189–217) の結果により，摂動 Ruelle 転送作用素の固有値と対応する固有射影の漸近挙動が得られる一方で，自由度の高い摂動を考えることはできない．申請者は同不等式を満たさないような有限グラフ版の Ruelle 転送作用素の漸近摂動を考え，固有値・固有ベクトルの漸近挙動を与えることができた (Monatsh. Math. 164 (2011), 467–486). 同手法を無限グラフ版の転送作用素に適用可能にするため，漸近理論を再構築する必要がある．



ホールをもつ
摂動 GIFS の例

(3) **ホール（hole）をもつ摂動系**とは，2 つ以上の位相推移的な力学系の間に大きさ ϵ の小さいホール（穴）が開いており行き来出るが，$\epsilon \to 0$ でホールがなくなるような力学系であり，開放系又は準安定系と呼ばれる非平衡力学系の一種である．摂動 GIFS においても，摂動系を構成する写像が “つぶれる” とき，複数の位相推移的なコンポーネントに分裂しホールをもつ摂動系になりうる（右の例参照）．ホールをもつ摂動系における重要な問題の一つは，摂動系で定義される平衡測度が $\epsilon \to 0$ のとき，どのような重みづけで複数の平衡測度に分裂するのか，

又は振動し続けて収束しないのかという問題である．有限グラフの場合，Dolgopyat & Wright (2012, Stoch. Dyn. 12, 1150005 (2012))，自身の研究（Nonlinearity, 32, 728–767, (2019)）により適当な条件の下ホールが 1 次漸近挙動するときは平衡測度が収束することがわかった．また，ホールが一般のつぶれ方をする場合は，自身の研究により，**Ruelle 転送作用素の Perron 補元**の操作によって得られる新しい転送作用素の固有値の言葉を使って Gibbs 測度の収束するための必要十分条件を与えることができた (Isr. J. Math. 236, 91–131 (2020))．なお，力学系の観点からみると Perron 補元の操作よってできる作用素はシフト変換の induced map と結び付く転送作用素と言うことができる．Perron 補元の概念は最初に Meyer (Linear Algebra Its Appl. 114 (1989), 69–94) によって非負行列に対して与えていたが，申請者によって同概念を有限グラフ版の転送作用素に適用できるよう拡張された．今後，Perron 補元の概念を無限グラフ版の転送作用素に適用可能にする研究と，平衡測度の収束性に応用する研究が必要になってくる．

２．研究の目的

本研究の目的は次の (1)-(3) がある．

(1) 有向グラフ反復関数系 (GIFS) の漸近摂動について，有限グラフのときかつ一様 Lasota-Yorke 型不等式を満たさないときの次元，Gibbs 測度，測度論的エントロピーの漸近挙動は得られているが (J. Fractal Geom. 3 (2016), 119–161) 無限グラフの場合について分かっていないため，その研究を行うことである．特に無限グラフの場合は，漸近挙動のオーダーが減少する例が見つかっており，オーダーの正確な長さと各係数の値を正確に求める必要がある．

(2) ホールをもつ摂動 GIFS における平衡測度の収束性について，有限グラフの場合の自身の結果 (Isr. J. Math. 236, 91–131 (2020)) を無限グラフの場合に拡張する研究を行う．これらを実現するために，無限グラフ版 Ruelle 転送作用素の Perron 補元の概念を導入し諸性質を調べること，および同作用素が適用可能な一般漸近理論を構築することである．

(3) (1) と (2) の結果を，非共形 GIFS の次元の推定問題に適用することである．

３．研究の方法

具体的な研究方法として，以下の (1)-(4) がある．

(1) **無限グラフ版の転送作用素が適用可能な一般漸近理論を構築する**．Gouëzel と Liverani (Ergod. Theory Dyn. Syst. 26 (2006), 189–217) による定式化を参考にして，複数の Banach 空間上で定義される n 次漸近摂動された転送作用素の単純な固有値，対応する固有関数，および双対作用素の対応する固有ベクトルが n 次漸近挙動するための十分条件を与える．特に，レゾルベントの摂動を伴わない手法 (Monatsh. Math. 164 (2011), 467–486) を拡張することで Lasota-Yorke 型不等式の条件を外すことを目指す．加えて，スペクトルの漸近展開の長さを 0 次から高次の漸近展開へと帰納的に長くしていく方法により，解析摂動論を用いない方法で考える．

(2) **漸近摂動 GIFS の次元・Gibbs 測度・測度論的エントロピーの漸近挙動**について，無限グラフかつ一様 Lasota-Yorke 型不等式を満たさない場合の研究を行う．Buzzi と Sarig (Erg. Th. Dynam. Sys., 23, 1383–1400 (2003)) を参考にし，上記１の複数の Banach 空間として L^1 空間，連続関数空間，Lipschitz 連続関数空間を用いる手法による，位相的圧力，Gibbs 測度，測度論的エントロピーの漸近展開を与える．加えて次元の漸近挙動のため，位相的圧力の方程式（Bowen の等式）の解から次元の漸近解を与えるための一般論を構築する．その際オーダーが減少する場合があるため，正確なオーダーを求める研究を行う．

(3) **ホールをもつ摂動 GIFS における平衡測度の収束性**について，無限グラフの場合に Ruelle 転送作用素の Perron 補元の概念を用いて調べる．まず，無限グラフ版の Ruelle 転送作用素の Perron 補元を導入し，有限グラフの場合に得られていた諸性質（固有関数と固有測度の分解定理，補元操作に関する不変性等）と同等の結果が得られることを確認する．次に，有限グラフの場合の結果 (Isr. J. Math. 236, 91–131 (2020)) を参考に無限グラフ版の平衡測度の収束性の問題に適用する．

(4) **非共形 GIFS の次元の推定** に漸近摂動の手法を適用する研究を行う．まず，Bowen の等式から求めることができる GIFS から非共形 GIFS へ漸近摂動し，Bowen の等式の漸近解を２の結果を使って求める．次に，Falconer (Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1994), 115, 315-334) による次元の上下の評価を参考にして，Bowen の等式の解と実際の次元のずれ具合を漸近展開のスモールオーダー部分でコ

ントロールすることによって，次元の高次漸近展開を求める．

４．研究成果

研究成果として，以下の (1)-(6) がある．

(1) 線形空間とそれらの上で定義された転送作用素たち $\mathcal{L}_k$ を係数にもつ漸近摂動作用素 $\mathcal{L}(\epsilon,\cdot) = \mathcal{L} + \mathcal{L}_1\epsilon + \cdots + \mathcal{L}_n\epsilon^n + o(\epsilon^n)$ を導入し，その固有値，対応する固有関数，および双対作用素の対応する固有ベクトルの漸近展開の係数及び剰余項の明示式を与えた．そのうえで，摂動作用素の固有値が一様スペクトルギャップをもたないという条件の下，剰余項が 0 に収束のための十分条件が得られた．これは，固有値が一様スペクトルギャップをもつ場合について研究されている既存の漸近摂動理論が適用できないケースである．応用として，無限有向グラフの構造をもつ反復関数系 (GIFS) の極限集合のハウスドルフ次元と結びつく Gibbs 測度の漸近挙動を与えた．一様スペクトルギャップなしで摂動ポテンシャルの位相的圧力及び Gibbs 測度が漸近的な振る舞いをする具体例も構成した．別の例では，主結果の条件が Gouezel, Liverani (2006) が与えた抽象漸近理論の条件＋ある自然な条件の下で満たされることを示している．これらの結果は，プレプリントとしてまとめ（Arxiv: 2205.12561），投稿および適宜修正を行っている．ここで得られた結果は，シフト空間のみならず一般の Banach 空間でも適用可能であり，別の摂動問題へ適用できる可能性を秘めているという意味でよい成果が得られた．

(2) 可算無限状態をもつシフト空間上で定義される摂動ポテンシャルの圧力方程式 (Bowen 等式) の高次漸近解を抽象的な設定の下で与えた．そして，無限グラフをもつ反復関数系 (GIFS) について，一様 Lasota-Yorke 型不等式を満たさないような漸近摂動に適用し，極限集合の Hausdorff 次元の漸近挙動を得た．また，無限グラフの場合特有の漸近摂動に関する問題として，漸近挙動する次元のオーダーがもとのオーダーよりも真に小さくなるような具体例を，区分的な線形拡大的写像の漸近摂動の特別な設定の中で与えた．他の具体例として，ショットキー型クライン群の摂動，および，実連分数と複素連分数の漸近摂動も与えた．これらの内容は，Journal of Fractal Geometry (DOI:10.4171/JFG/128) に掲載される予定である．ここで得られた Bowen 等式の漸近解は，各係数及びスモールオーダー部分が詳細に与えることができており，係数の解釈や数値計算による近似値の評価にも役立つという意味で有用性のある結果が得られた．

(3) 無限の状態をもつシフト空間上で定義される 2 つのポテンシャル φ と ψ に対し，$\varphi + \epsilon\psi$ の位相的圧力 $P(\varphi + \epsilon\psi)$ の漸近展開 $P(\varphi + \epsilon\psi) = P(\varphi) + p_1\epsilon + \cdots + p_n\epsilon^n + o(\epsilon^n)$ を考え，各係数の統計的表現について調査した．なお，係数 p_1, p_2 については適切な条件の下，統計的に重要な量と一致することが知られている: p_1 は φ の Gibbs 測度による ψ の期待値であり，p_2 は asymptotic variance（漸近分散），すなわち中心極限定理における極限で出てくる正規分布の分散である．特にこの asymptotic variance は，m-ergodic sum (離散力学系が $0, 1, 2, \cdots, m-1$ と動いたときのポテンシャル ψ の値の和から ψ の期待値を引いたもの）を 2 乗し Gibbs 測度で測ったものを m で割り極限 $m \to \infty$ として現れる量であり，混合性の指数的速度とも関係する．p_2 のこのような極限表現を得るための条件として「$\epsilon \mapsto P(\varphi + \epsilon\psi)$ が実解析的」が知られている．本研究では，$\epsilon \mapsto P(\varphi + \epsilon\psi)$ が非実解析的であっても，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ が存在し，かつ p_2 が asymptotic variance になるための十分条件を与えた．さらに，3 番目の係数 p_3 も asymptotic variance と同様の統計的極限表現をもつこと，及び p_4 以降は一般に同様の表現を持たないことを示した．これらの結果は，本研究課題の直接的な目標ではなかったが，将来的に漸近展開の各係数の意味付けを考えるうえで重要な研究である．特に，p_3 の統計的表現は申請者の知る限り他になく，インパクトが大きい結果が得られたと考えている．また，補助的結果として，m-ergodic sum の k 乗を Gibbs 測度で測ったときの $m \to \infty$ のときの発散スピードを与えた．応用として，関数空間 $L^k(\mu)$ (k は正の偶数，μ は Gibbs 測度） における平均エルゴード定理の収束スピードを正確に与えた．また，ψ が定数と cohomologous である場合，各係数 p_k が 0 になることを示した：　これは $\epsilon \mapsto P(\varphi + \epsilon\psi)$ が実解析な場合と同様の結果である．これらの内容はプレプリントとしてまとめており，投稿および適宜修正を行っている．

(4) 可算状態をもつマルコフシステムの open system（開放系）に結び付く転送作用素のスペクトル的性質を与えた．主結果として，もしシフト写像の closed system が既約な遷移行列をもち，ポテンシャルがある弱い Lipschitz 連続性かつ summable であるとき，転倒作用素の Ruelle-Perron-Frobenius 型定理，擬コンパクト性，及び open system の escape rate を与えた．これらの結果は，Demers, Ianzano,

Mayer, Morfe と Yoo (Discrete and Contin. Dynam. Sys. 37, 105–130, (2017)) の結果の一般化にあたる．また，主結果の系として，位相推移的なマルコフシステムに結び付く転送作用素のスペクトルギャップ性を示した．これは，Aaronson と Denker (Stoch. Dyn. 1, 193237 (2001)) 及び Mauldin と Urbanski (Isr. J. Math. 125, 93-130 (2001)) の結果の拡張にあたる．具体例として，① 記号力学系の特異摂動を伴う摂動ポテンシャルの位相的圧力と Gibbs 測度の連続性，② ある可算 Markov chain のスペクトル性質，③ グラフ構造をもつ反復関数系に結び付く転送作用素のスペクトル性質，及び ④ 局所定数ポテンシャルの転送作用素のスペクトル情報をそれぞれ与えた．これらの内容はプレプリントとしてまとめ (Arxiv:2207.08085)，投稿および適宜修正を行っている．ここでの結果は，ポテンシャルに強い条件である summable (summable variation でないことに注意せよ) を課す代わりに遷移行列への条件をほぼなくすことができる点が利点である．summable はフラクタル解析では馴染みの条件であり，今後摂動 GIFS の分裂現象を扱う際にここで得られた結果が役立つと期待される．

(5) 漸近摂動の手法を用いた非共形 (non-conformal) GIFS の次元の近似について研究を行った．Bowen 等式の漸近解に関する自身の結果 (上記 (2) を参照) を活用することにより，非摂動系は共形，摂動系は非共形となる設定において，非共形 GIFS の極限集合の Hausdorff 次元の高次漸近展開を与えた．ただし，GIFS を構成する関数たちの漸近展開の長さを長くすればするほど次元の近似値の精度はあがる一方で，同時に非共形性の指数（共形な状態からどれぐらいゆがんでいるかの指数）も共形性の指数に近くしなければならず，そういう意味では理想的な結果とは言い難い．この部分の改善は今後の課題である．これらの結果はプレプリントとしてまとめ投稿中である．

(6) 有限状態をもつ open 型の摂動 Markov システムに関する既存の結果 (Isr. J. Math. 236, 91–131 (2020)) を可算状態をもつ場合に拡張する研究を行った．有限状態から可算無限状態に拡張したことにより，コンパクト集合上の解析手法が使えない影響が大きく，期待した成果を得るには至らず妥協した結果を与えるにとどまっている．具体的には，摂動マルコフシステムの Gibbs 測度の収束性及び極限の凸表現性を直接求める代わりに，可算状態空間から任意に有限集合を選び，そこからできる 1-シリンダー上の条件つき Gibbs 測度の収束性及び極限の凸表現性を与えた．これにより，元の Gibbs 測度の収束する十分条件を与えることはできる．この研究では，転送作用素の Perron 補元の手法がつかわれているが，有限状態から無限状態にしたことによるスペクトルへの影響がまだ解明できておらず，今後の進展を期待している．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　3件）

１．著者名 Haruyoshi Tanaka	４．巻 -
２．論文標題 Asymptotic solution of Bowen equation for perturbed potentials on shift spaces with countable states	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Journal of Fractal Geometry, to appear	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JFG/128	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Haruyoshi Tanaka	４．巻 2217
２．論文標題 Asymptotic behaviours of pressure functionals and statistical representations of the coefficients	５．発行年 2022年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku "Integrated Research on Random Dynamical Systems and Multi-Valued Dynamical Systems"	６．最初と最後の頁 51-61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 田中晴喜	４．巻 -
２．論文標題 On dimension estimates in nonconformal graph iterated function systems via asymptotic perturbation	５．発行年 2023年
３．雑誌名 日本数学会 2022年日本数学会年会，統計数学分科会講演アブストラクト	６．最初と最後の頁 43-44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Haruyoshi Tanaka	４．巻 2176
２．論文標題 Asymptotic solution of Bowen equation for perturbed potentials defined on shift spaces	５．発行年 2021年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku	６．最初と最後の頁 28-36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　6件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 田中晴喜
２．発表標題 Asymptotic behaviors of thermodynamic quantities in perturbed graph directed Markov systems
３．学会等名 RIMS共同研究集会「ランダム力学系・非自励力学系研究の展望：理論と応用」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 田中晴喜
２．発表標題 Quasi-compactness of transfer operators for topological Markov shifts with holes and some applications
３．学会等名 RIMS共同研究（グループ型A）「エルゴード理論の最近の進展」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 田中晴喜
２．発表標題 Quasi-compactness of transfer operators for topological Markov shifts with holes and some applications
３．学会等名 「2022 年度エルゴード理論研究集会」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 田中晴喜
２．発表標題 On dimension estimates in nonconformal graph iterated function systems via asymptotic perturbation
３．学会等名 「2022 年度冬の力学系研究集会」
４．発表年 2022年

１．発表者名 田中晴喜
２．発表標題 グラフ構造をもつ反復関数系の漸近摂動とその応用
３．学会等名 広島確率論・力学系セミナー（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 田中晴喜
２．発表標題 On dimension estimates in nonconformal graph iterated function systems via asymptotic perturbation
３．学会等名 日本数学会2023年度年会
４．発表年 2023年

１．発表者名 田中晴喜
２．発表標題 Asymptotic behaviours of pressure functionals and statistical representations of the coefficients
３．学会等名 数理解析研究所共同研究（公開型）オンライン研究集会「ランダム力学系および多価写像力学系理論の総合的研究」（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 田中晴喜
２．発表標題 可算マルコフシフトに対する熱力学形式における漸近解析
３．学会等名 広島確率論・力学系セミナー（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 田中晴喜
２．発表標題 An asymptotic analysis in thermodynamic formalism for countable Markov shifts
３．学会等名 2020年度冬の力学系研究集会
４．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関