

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03654

研究課題名（和文）有限予測における表現定理とテプリッツ系に対する線形時間アルゴリズム

研究課題名（英文）Representation theorems in finite prediction and linear-time algorithms for Toeplitz systems

研究代表者

井上 昭彦（Inoue, Akihiko）

広島大学・先進理工系科学研究科（理）・教授

研究者番号：50168431

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：正定値の行列値関数でその逆行列も可積分であるようなシンボルを持つテプリッツ行列を考える。このようなテプリッツ行列は、minimal な多変量定常過程に対応する。井上は、このテプリッツ行列の逆が、双対過程の有限予測により表現されることを示した。また、この表現式を用いて、同じクラスのテプリッツ行列の逆に対する明示公式を導いた。井上は、この明示公式の有用性を、二つの応用で示した。一番目は、テプリッツ系の解の強い収束性に関する結果（Baxter型定理）である。二番目は、シンボルが有理的なテプリッツ行列の逆行列に対する閉形式公式である。この閉形式公式から、テプリッツ系の線形時間アルゴリズムが得られる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

テプリッツ行列は数学に限らず様々な分野で重要な役割を果たしている。このようなテプリッツ行列の逆と双対過程あるいは有限予測とを初めて結び付けた。また、テプリッツ行列の逆に対し、有限予測に基づく新しい解析手法を導入した。Baxter型定理という概念を導入し、短期記憶と長期記憶の両方の定常過程の場合の対応するテプリッツ系に対しそのBaxter型定理が成り立つことを示した。有理シンボルを持つテプリッツ系を線形時間で解く超高速アルゴリズムを示した。テプリッツ行列の逆に対する局所評価の観点を導入した。

研究成果の概要（英文）：We consider a block Toeplitz matrix that has a symbol with an integrable inverse. Such a Toeplitz matrix corresponds to a minimal multivariate stationary process. Inoue showed that the inverse of the Toeplitz matrix has a simple representation in terms of the finite prediction of the dual process. Furthermore, Inoue derived explicit formulas for the inverse of the Toeplitz matrix using the representation formula. Inoue demonstrated the importance of the explicit formulas by two applications. The first is a strong convergence result, called a Baxter-type theorem, for the Toeplitz system. The second application is a closed-form formula for the inverse of a Toeplitz matrix with a rational symbol. The closed-form formula implies a linear-time algorithm for solving the Toeplitz system.

研究分野：確率論

キーワード：有限予測 テプリッツ系 テプリッツ行列の逆行列 明示公式 Baxter型定理

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 初期の1次元過程での経緯。研究代表者は、定常時系列の有限予測誤差に対するある表現定理を示したが、それが「有限予測における表現定理」の原形である。その際、von Neumannの交互射影定理と確率過程の過去と未来の交差性を組み合わせるというアプローチを導入した。このアプローチは発展性があり、現在までも有限予測における種々の表現定理を示す際の基調をなしている。研究代表者は、単独あるいは共同研究で、離散時間過程および連続時間過程に対し、有限予測における表現定理とその応用という観点と手法を発展させ、予測係数と偏相関関数の表現定理及び漸近挙動、長期記憶モデルに対するBaxterの不等式、分数冪ブラウン運動型確率過程に対する有限予測公式、定常増分過程の新生過程の明示表現等の種々の成果を得た。

(2) 多変量過程への拡張。(1)の種々の結果を多変量過程に拡張する問題は、この分野における最も本質的な未解決問題として残っていた。これに対し、2011年に研究代表者と笠原雪夫氏は離散時間の場合に多変量への拡張の鍵となるアイデアを見出した。このアイデアは数年かけて発展させられ、最終的にとにおいて(1)の結果は多変量過程へと拡張された。同時に、有限予測における表現定理を示す際のvon Neumannの交互射影定理と確率過程の「過去と未来の交差性」を組み合わせるアプローチは、で洗練された形に整備された。

(3) 多変量ARMA過程の有限予測係数の閉形式表示。研究代表者はにおいて、で得られた多変量定常過程の有限予測係数に対する明示公式(ただし無限級数を含む)を用いて、離散時間の多変量ARMA過程の有限予測係数に対する閉形式表示(初等関数の有限回の操作による表示)を導いた。の結果の興味深い点は、有限予測係数を線形時間 $O(n)$ で求めるアルゴリズムになっていることである。例えば有名な高速アルゴリズムのDurbin-Levinsonアルゴリズムの計算量は $O(n^2)$ である。テプリッツ系に対する $O(n^2)$ より高速のアルゴリズムは超高速(superfast)とよばれる。 $O(n)$ より速くはできないので、線形時間 $O(n)$ のアルゴリズムは究極の超高速アルゴリズムである。

### 2. 研究の目的

研究代表者は、において多変量ARMA過程の有限予測係数に対する閉形式表示を導いたが、これは有限予測係数を線形時間で求めるアルゴリズムと見ることができる。有限予測係数は、Yule-Walker方程式という特殊なテプリッツ系の解である。このことから、多変量ARMA過程のテプリッツ行列 $T_n$ に対する一般のテプリッツ系 $T_n x = b$ に対しても、これを線形時間という究極の超高速で解くアルゴリズムを求められないか、という問題が生じる。また、そもそも、の結果は、研究代表者とその共同研究者が、や、等において発展させてきた「有限予測における表現定理とその応用」というテーマの延長線上にある。このことからすると、(有理シンボルに対応する)多変量ARMA過程とは限らない一般テプリッツ行列やテプリッツ系の理論と研究代表者たちの「有限予測における表現定理とその応用」のテーマを何らかの形で融合させることはできないか、という問題も生じる。これらの事柄を明らかにすることが、本研究の目的である。

### 3. 研究の方法

(1) テプリッツ系 $T_n x = b$ を考える。ここで $T_n$ のサイズは $n$ に比例して大きくなる。この解 $x$ に関して何かを示したいとする。このとき、自然に $T_n$ の逆行列のふるまい、あるいは評価を得たくなる。本研究では、 $T_n$ の逆行列に対する明示公式を利用するアプローチを導入した。このような明示公式が一旦得られると、欲しい $T_n$ の逆行列のふるまいや評価を調べるための非常に強力な道具となることが、や、等の経験から容易に推察できる。問題は、いかにして $T_n$ の逆行列に対する明示公式を得るかである。これについては、結局、双対過程の有限予測を考えることが鍵となることが分かった。

(2) こうして $T_n$ の逆行列に対する明示公式はで得られたが、その有効性を示す応用例がなければ、その意義はなかなか理解されないであろう。実際、の研究で最も時間のかかった部分は、 $T_n$ の逆行列に対する明示公式の良い応用例を示すことであった。最終的にでは、そのような応用例として短期記憶過程に対するものを二つ与えた。明示公式自体は長期記憶モデルに対しても成り立つが、長期記憶過程に対する応用例を示すのはかなり大変であり、次の仕事にまわすことにした。

(3)  $T_n$ の逆行列に対する明示公式の長期記憶過程に対する応用例を示すことは全く簡単ではなく、技術的にハードな解析を行う必要がある。非常に難しい問題であったが、J. Yang氏との共同研究で、最終的には局所的な観点の導入により欲しい結果が得られた。この局所的な観点はなかなか見出すことが難しく、また、他の研究者にその重要性を理解してもらうのも苦労するが、

研究代表者と J. Yang 氏の考えでは、この観点は将来、さらに重要な役割を果たす可能性がある。

#### 4. 研究成果

(1) 正定値の行列値関数でその逆行列も可積分であるようなシンボルを持つブロック・テプリッツ行列を考える。このようなテプリッツ行列は、minimal な多変量の離散時間定常過程に対応する。minimal という条件は弱い条件であり、応用上重要なほとんどすべての定常過程はこの条件を満たす。研究代表者は において、このようなテプリッツ行列の逆行列が、対応する定常過程の双対過程の有限予測により簡明に表現されることを発見した。この研究成果は、テプリッツ行列の逆と双対過程あるいは有限予測とを初めて結び付けたものである。研究代表者は、同じ においてこの表現式を用いて、minimal の条件を満たすすべてのテプリッツ行列の逆に対する明示公式を導いた。この明示公式の主要な構成要素は、シンボルに付随する相関数とよばれるユニタリ行列値関数のフーリエ係数である。この明示公式は、文献 - や - 等で研究代表者および共同研究により様々な有限予測に関係する量や関数に対し展開・応用されてきたものと、同じタイプのものである。このことは、有限予測における表現定理とその応用に関し - や - 等でこれまで開発されてきた種々のテクニックが、テプリッツ行列の逆の研究にも適用できるようになったことを意味する。テプリッツ行列は数学に限らず様々な分野で重要な役割を果たしている。 の貢献の一つは、テプリッツ行列の逆に対しこの有限予測に基づく新しい解析手法を導入したことである。

(2) 研究代表者は において、上記のテプリッツ行列の逆行列に対する明示公式の有用性を、二つの応用で示した。このうち第一の応用は、テプリッツ行列のサイズが大きくなっていく際の、テプリッツ系の解の強い収束性に関する結果である。この結果は、特別なテプリッツ系である Yule-Walker 方程式の解に対しては、Baxter の不等式とよばれるものの応用として古くから知られていた。研究代表者の の結果は、短期記憶過程の場合に、この Baxter 型定理を一般のテプリッツ系の解に対する結果へと拡張したものである。

(3) で示されたテプリッツ行列の逆行列に対する明示公式の二番目の応用は、シンボルが有理的な場合の、テプリッツ行列の逆行列に対する閉形式公式である。この閉形式表示は、テプリッツ行列のサイズによらないいくつかの行列を構成要素として、それらを組み合わせた形で与えられる。この閉形式表示の著しい点は、これから、対応するテプリッツ系の線形時間アルゴリズムが得られる点である。線形時間アルゴリズムは、それよりも早いアルゴリズムが存在しないという意味で究極の超高速アルゴリズムである。

(3) 上記の二つの応用は、いずれも、シンボル(すなわちスペクトル密度)が特異点を持たない短期記憶過程に対するものであった。一方、上に述べた のテプリッツ行列の逆行列に対する明示公式は、minimal という弱い条件で成り立ち、特に、特異なシンボルを持つ多変量 ARFIMA 過程などの長期記憶過程に対しても成り立つ。J. Yang 氏 (台湾 Academia Sinica) と研究代表者は、 のブロック・テプリッツ行列の逆行列に対する明示公式を多変量長期記憶過程に応用し、次に述べる研究成果を得た。すなわち、研究代表者と J. Yang 氏は、代表的な長期記憶過程である多変量 ARFIMA 過程に対応するブロック・テプリッツ系を考察し、 のブロック・テプリッツ行列の逆行列に対する明示公式を用いて、対応するテプリッツ系の解に対する強い収束性の結果 (Baxter 型収束定理) を示した。この結果は、上の(2)で述べた の短期記憶過程に対する同様の結果の長期記憶過程に対する類似物となっている。この研究成果を得る上で鍵となったのが、ブロック・テプリッツ行列の逆行列の評価に関する局所近似の観点の導入であった。実際、研究代表者と J. Yang 氏は、この局所的な観点の導入こそが、将来この仕事の最大の貢献とみなされることになるであろうと考えている。これらの成果は、研究代表者と J. Yang 氏の共著論文として、現在投稿中である。

(4) 研究代表者と J. Yang 氏は、上記のテプリッツ行列の逆に対する局所近似の観点が短期記憶過程に対しても有用であることを見出した。すなわち、局所近似の観点をを用いると、 の短期記憶過程に対する Baxter 型定理の改良が得られることを研究代表者と J. Yang 氏は見出した。さらに、その際の副産物として、定常時系列のスペクトル密度の AR 推定に関するある便利な判定条件が得られることを、研究代表者、J. Yang 氏および D. N. Politis 氏と J. Wang 氏 (共に University of California, San Diego) の 4 人は見出した。これらの成果に関する論文は、現在準備中である。

#### < 引用文献 >

A. Inoue, Asymptotics for the partial autocorrelation function of a stationary process, *J. Anal. Math.*, 81, 2000, 65-109.

A. Inoue, AR and MA representation of partial autocorrelation functions, with applications, *Probab. Theory Related Fields*, 140, 2008, 523-551.

A. Inoue, Closed-form expression for finite predictor coefficients of multivariate ARMA processes, *J. Multivariate Anal.*, 176, 2020, 104578, 18 pp.

A. Inoue, Explicit formulas for the inverses of Toeplitz matrices, with applications, *Probab. Theory Relat. Fields*, 185, 2023, 513-552.

A. Inoue, Representation theorems in finite prediction, with applications [English Translation of the Japanese Original], Sugaku Expositions 36 (2023), 173-197.

A. Inoue and Y. Kasahara, Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications, Ann. Statist, 34, 2006, 973-993.

A. Inoue and Y. Kasahara, Simple matrix representations of the orthogonal polynomials for a rational spectral density on the unit circle, J. Math. Anal. Appl., 464, 2018, 1366-1374.

A. Inoue, Y. Kasahara and M. Pourahmadi, The intersection of past and future for multivariate stationary processes, Proc. Amer. Math. Soc., 144, 2016, 1779-1786.

A. Inoue, Y. Kasahara and M. Pourahmadi, Baxter's inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes, Bernoulli, 24, 2018, 1202-1232.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Akihiko Inoue	4. 巻 185
2. 論文標題 Explicit formulas for the inverses of Toeplitz matrices, with applications	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Probability Theory and Related Fields	6. 最初と最後の頁 513 ~ 552
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00440-022-01162-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Inoue Akihiko	4. 巻 36
2. 論文標題 Representation theorems in finite prediction, with applications	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 173 ~ 197
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/suga/481	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 井上 昭彦、Tianqi Wang、Junho Yang
2. 発表標題 ARMAモデルのToeplitz系に対する線形時間アルゴリズムの安定化
3. 学会等名 2023年度確率論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 井上 昭彦、Junho Yang
2. 発表標題 多変量長期記憶過程のテプリッツ系に対するBaxter型定理
3. 学会等名 2022年度確率論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 井上 昭彦、Junho Yang
2. 発表標題 多変量長期記憶定常過程に対するテプリッツ系
3. 学会等名 2021年度確率論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 井上 昭彦
2. 発表標題 テプリッツ系に対する Baxter 型収束定理
3. 学会等名 2020年度確率論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

井上昭彦のホームページ <a href="https://home.hiroshima-u.ac.jp/inoue100/">https://home.hiroshima-u.ac.jp/inoue100/</a> Akihiko Inoue's Homepage <a href="https://home.hiroshima-u.ac.jp/inoue100/index-e.html">https://home.hiroshima-u.ac.jp/inoue100/index-e.html</a>
---

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------