

令和 5 年 6 月 27 日現在

機関番号：12401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03671

研究課題名(和文)非線形ディラック方程式の非相対論的極限

研究課題名(英文)Nonrelativistic limit for the nonlinear Dirac equation

研究代表者

町原 秀二 (Machihara, Shuji)

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：20346373

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：岡本葵氏との共同研究で非線形ディラック方程式の初期値問題の非適切性を導き論文を発表した。ベズニール氏ら5名との共同研究で熱流法の実用に関する研究を行い論文を発表した。川上翔汰氏と共同研究で非線形シュレディンガー方程式の爆発解の具体的な構成に成功し論文を発表した。ベズニール氏、小澤徹氏と共同研究で球面調和関数を用いたハーディの不等式の解析を行い論文を発表した。成亥隆恭氏と共同研究で消散項をもつ非線形波動方程式の特異極限の問題を行い論文を発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

偏微分方程式の初期値問題は様々な自然現象・社会現象を映し出し、その重要性はますます高まっている。その問題が適切であるとは、解が一意存在し、初期値に連続的に依存することを指す。つまり方程式初期値問題の根幹をなす研究と言える。非適切性の議論はその裏の意味があるが、つまりは適切性の議論の本質を浮き彫りにする効果がある。研究代表者の研究成果は問題を適切性と非適切性で分類したものであり、その重要度は高い。またハーディの不等式を始めとする関数不等式の研究を行った。球面調和関数を用いた解析はまだまだ数は少なく、独創的なアイデアによるものと言える。

研究成果の概要(英文)：In collaboration with Mamoru Okamoto, derived ill-posedness of the initial value problem for the nonlinear Dirac equation and published a paper. In collaboration with Bez Neal and five others, we studied on the application of the heat flow method and published a paper. In collaboration with Shota Kawakami, we succeeded in constructing a concrete blows-up solution for the nonlinear Schrodinger equation and published a paper. In collaboration with Bez Neal and Tohru Ozawa, we analyzed Hardy's inequality using spherical harmonic functions, and published a paper. In collaboration with Takahisa Inui, we solved the problem of singular limit of nonlinear wave equations with dumped terms, and published a paper.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：非線形波動方程式 非線形シュレディンガー方程式 ハーディの不等式 球面調和関数

1. 研究開始当初の背景

非線形シュレディンガー方程式と非線形ディラック方程式の初期値問題に関する初期値問題の適切性がかなり得られていたが、非相対論的極限の問題は長らく残されていた。またこの問題の解決のためにはコンパクト性の議論が避けられないことは知られていた。そのためには爆発解の構成方法なども調査が必要であると感じていた。

2. 研究の目的

非線形ディラック方程式の解に対する特異極限の問題を解決すること。またそれに対する関連問題に取り組む。またコンパクト性の議論、そして関数空間不等式の先鋭化などの解析学に技術の底上げが必要である。

3. 研究の方法

国内外の研究者、共同研究者と電子的な連絡をとる。または対面での研究打ち合わせを行う。研究代表者個人での計算を行う。

4. 研究成果

岡本葵氏との共同研究で非線形ディラック方程式の初期値問題の非適切性を導き論文を発表した。まず偏微分方程式の初期値問題の適切性とは解の存在、解の一意性、解の初期値への連続依存性の三つを満たすことである。そして問題が非適切性を示すにはこの中から一つでも否定すればよい。今回空間 1 次元において非線形ディラック方程式の初期値問題の適切性と非適切性で解の分類に成功した。ここでこの問題は終結したことになる。非適切性に関しては、幾つかのテクニックが知られていた。ベジェナル・タオによる正則度制限法。これは一般に関数の正測度（つまり滑らかさ）が高いと問題が解きやすい。これは非適切性を目指すときには逆の効果をもたらせてしまう。そこで解を構成する一つの項が正測度が上がってももう一つの項が正測度が上がらないように制御する方法である。また小川・岩渕による解の逐次近似展開法。解を逐次近似的に非線形項に代入し、その第一成分、もしくは第二成分部分までが正測度が足らずにそれより高次の成分においては正測度が十分にあるという状況を作ることである。これらの方法は二次の非線形項における、高周波と低周波の組み合わせで、採用する場面が変わる。今回非線形ディラック方程式の初期値問題では、その場面場面において適当なテクニックが採用されている。元々適切性に関してはその限界的成果が得られていたので、非適切の技術を進展させることで今回の最終結論を得るに至った。

ベズニール氏ら 5 名との共同研究で熱流法の応用に関する研究を行い論文を発表した。元々はベズ氏とベネット氏のヤングの不等式への最良定数の導出に用いられた方法で、これら不等式は全く別の出生である熱方程式を用いたことで注目を集めていた。

川上翔汰氏と共同研究で非線形シュレディンガー方程式の爆発解の具体的構成に成功し論文を発表した。この研究の元々の動機はカズナブ氏らによる先行結果においてその論文に記された「技術的問題による超えられない壁」を超すためのものであった。偏微分方程式の関数空間論における不等式の組み合わせによる議論であったが、全く新しい組み合わせを用いて解決を導いた。爆発解の構成にはまずそのプロファイルを表現する常微分方程式の解を用いる。その常微分方程式が時刻有限で爆発すること、そして偏微分方程式である非線形ディラック方程式の解がその常微分方程式の解と「近い」ことを示す。また新規性としては、このこと以外にも関数の存在を保証するコンパクト性の議論においても工夫が見られた。これはオーバン・リオンスの補題を用いるものでアスコリ・アルツェラの定理の関数空間版と言える。

ベズニール氏、小澤徹氏と共同研究で球面調和関数を用いたハーディの不等式の解析を行い論文を発表した。球面調和関数は調和解析で利用される技術であるが、二乗可積分関数全体の関数空間において、直交する射影作用素をもつ。このことを用いてハーディの不等式を調査した。一度、等式を導いて、そして不要項を抜き去ることで当該不等式を得るという全く新しい議論が採用された。これはその抜き去る項を調査すれば、不等式の最良性および最良定数などが自動的に

抽出できるなど、不等式以上の情報を与えてくれた。

成亥隆恭氏と共同研究で消散項をもつ非線形波動方程式の特異極限の問題を行い論文を発表した。これは研究課題の非線形ディラック方程式の非相対論的極限の問題にもっとも関連深い研究と言える。解の関数を高周波と低周波で分解し、それぞれで独立した関数を設定して解決を導いた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 S. Kawakami and S. Machihara	4. 巻 33
2. 論文標題 Blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with complex coefficient	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Differential Integral Equations	6. 最初と最後の頁 445--464
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Y. Aoki, J. Bennett, N. Bez, S. Machihara, K. Matsuura and S. Shiraki	4. 巻 199
2. 論文標題 A supersolutions perspective on hypercontractivity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Ann. Mat. Pura Appl. (4)	6. 最初と最後の頁 2105--2116
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10231-020-00958-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 S. Machihara and M. Okamoto	4. 巻 192
2. 論文標題 Sharp ill-posedness of the Dirac-Klein-Gordon system in one dimension	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Anal.	6. 最初と最後の頁 111687, 11
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2019.111687	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Inui, Takahisa and Machihara, Shuji	4. 巻 19
2. 論文標題 Non-delay limit in the energy space from the nonlinear damped wave equation to the nonlinear heat equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Hyperbolic Differ. Equ.	6. 最初と最後の頁 407-437
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219891622500126	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Shuji Machihara
2. 発表標題 Spherical harmonics and Hardy's inequalities
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「量子場の数理とその周辺」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 町原 秀二
2. 発表標題 球面微分とハーディの不等式
3. 学会等名 Workshop on Analysis in Kagurazaka 2021 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 町原 秀二
2. 発表標題 等式から眺める Rellich の不等式
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 町原 秀二
2. 発表標題 L2直交性から眺める Rellich の不等式
3. 学会等名 「解析学とその周辺」@野田 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------