

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03675

研究課題名（和文）平均場方程式の解の線形応答に関する数理解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis on the linear response for solutions of mean field equations

研究代表者

大塚 浩史 (OHTSUKA, Hiroshi)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：20342470

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：平均場方程式と呼ばれる多粒子系の平衡状態を記述する半線形楕円型偏微分方程式について、その摂動問題及び摂動に関する線形化問題を粒子系の視点から解析した。得られた成果は、簡略化された変数係数平均場方程式（変数係数Gel'fand問題）の線形化作用素の固有値のについて、これまで解析されていない漸近挙動である。具体的には、変数係数Gel'fand問題の解が $n$ 点爆発に十分近いとき、その線形化作用素の第1～第 $n$ 固有値が、爆発を特徴付けるHamiltonianから定まる $n \times n$ 行列の固有値で制御されることである。これは、摂動をしないGel'fand問題で知られていたことで、事実の普遍性を示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

平均場とは、離散的な存在である粒子系において、粒子数を無限大にした極限に現れる粒子数の連続的な分布関数のことである。本研究は、平均場に対し、粒子系に遡って摂動を加え線形応答（摂動に関する微分）を調べ、それを用いて平均場の線形応答を解析することを目的としていた。このような研究はあまり類を見ないが、無限の自由度をもつ場を扱う偏微分方程式を、より精度よく有限自由度系で近似する手法を研究するものであり、研究が進むことで、物理学や工学などの実用上の応用が広がることを期待できると考えている。得られたことは、極限操作を保証するのに必要な情報の一部に留まっているが、着実に成果を上げられたと考えている。

研究成果の概要（英文）：The perturbation problem and linearization problem related to the semilinear elliptic partial differential equation describing the equilibrium state of many particle systems, known as the mean-field equation, were analyzed from the perspective of the particle system. The obtained results concern the asymptotic behavior of the eigenvalues of the linearized operator for the simplified mean-field equation, known as the Gel'fand problem, with a variable-coefficient. More specifically, when the solution of the variable-coefficient Gel'fand problem is sufficiently close to an  $n$ -point blow-up, the first to  $n$ -th eigenvalues of the linearized operator are controlled by the eigenvalues of an  $n \times n$  matrix determined by the Hamiltonian characterizing the blow-up. I think this result proves the universality of the previously known results for the unperturbed Gel'fand problem."

研究分野：変分問題

キーワード：線形応答 点渦系 平均場 非線形楕円型方程式

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者はこれまで、平均場方程式と呼ばれる非線形楕円型偏微分方程式の研究に取り組み、解の爆発挙動などの解明で成果を上げてきた。平均場とは、離散的な存在である粒子系において、粒子数を無限大にした極限(平均場極限)に現れる、粒子の連続的な分布関数のことである。平均場方程式とは、このような平均場を満たす方程式であり、粒子系が平衡状態にある場合、その多くは半線形楕円型偏微分方程式になる。

このような研究と並行して、平均場を導く粒子系に関しても、研究代表者は、理論物理学者である八柳祐一氏(金沢大学)および羽鳥尹承氏(核融合研名誉教授)との共同研究を続けてきた。この共同研究を通して、点渦系と呼ばれる粒子系に対して、これを実験で再現する純電子プラズマ閉じ込め実験において、電子(点渦とみなせる)が集中する点の周りに円環状の真空(リングホール)が現れる現象を知るに及んだ。八柳氏はこれを計算機実験で再現し、羽鳥氏はこれを統計物理学における線形応答理論により説明しようと試みていた。羽鳥氏は、点渦系に対する線形応答を考察するとともに、平均場の線形応答をも考察し、この二つを対比させることで、平均場の中の二つの粒子の相関関数が満たすべき方程式を導いていたが、その議論は難解であった。研究代表者は数学者の立場でこの羽鳥氏の考察を分析し、粒子数を無限大にする平均場極限と摂動系の Gâteaux 微分という二つの極限操作の可換性を仮定していることを見出し、羽鳥氏の理論を数学の問題として定式化した。

このような極限の順序交換には一般に、少なくとも一方の極限のパラメータに関する一様な結論が必要になる。申請者は、摂動パラメータに依存する平均場方程式の解の枝の構成に必要な、非摂動系の解の非退化性に関する研究も続けていた。研究開始当時、この非退化性について、Bartolucci-Jevnikar-Lee-Yang ('18 Arch. Rational Mech. Anal.) による最新の成果が得られていたが、上記の極限操作の可換性の証明には、この最新の結果の更なる拡張が求められていると認識し、極限操作の可換性の研究が時宜に叶ったものであると考えた。

## 2. 研究の目的

線形応答とは、数学の用語で表現すると、平衡状態にある物理系に対し、平衡状態を崩すことなく外力により摂動したとき、状態に生じる変化の外力に関する Gâteaux 微分のことである。すなわち本研究の研究対象は、半線形楕円型偏微分方程式の摂動問題及び摂動に関する線形化問題の解の解析として捉えることができる。このような対象は偏微分方程式の研究として一般的だが、この一般的な対象を、平均場の由来である粒子系に遡って摂動を加え、粒子系の線形応答を求め、その線形応答の平均場極限を通して考察することに物理学の観点からも価値があることを、研究開始当時の状況から認識した。そこで本研究は、粒子系から見て、粒子数を無限大にする平均場極限と摂動系の Gâteaux 微分という「二つの極限操作の順序による差異」を解析すること、及び、それに得るに足るような、平均場方程式の基礎研究(平均場方程式の摂動問題の解の非退化性、一意性など)の精密化を目的とした。

## 3. 研究の方法

目的で述べた「二つの極限操作の順序による差異の解析」は、粒子系と平均場を同一の視点から解析するものであり、類似する研究を見なかった。その為、先ず、平均場方程式の基礎研究(平均場方程式の摂動問題の解の非退化性、一意性など)の精密化を進めた。これには、これまで共同研究の実績がある、佐藤友彦氏(日本大学)、高橋太氏(大阪公立大)、猪奥 倫左氏(東北大学)などと情報交換を続けると共に、関連する研究集会に参加して情報収集に努めた。粒子系の解析については、確率論などに実績がある Mark Peletier 氏(Eindhoven 工科大)の知遇を得ることができたので、氏を訪問し、多くの情報を得ることができた。特に、これまで取り組んでこなかった、大偏差原理、中心極限定理などの手法を用いた解析手法の適用可能性を示唆され、それらに関する基礎調査を開始し、関連する情報の収集に努めた。

## 4. 研究成果

目的で述べた「二つの極限操作の順序による差異の解析」については、残念ながら公表する成果を得るには至らなかったが、Mark Peletier 氏の示唆により、研究には大いに進展があった。数学としての平均場極限の収束定理の嚆矢である Messer-Spohn による結果('82 J.Stat.Phys.) が、今日大偏差原理の 1 つの定式化として知られるものと親和性が高いという示唆を受け、現在、その観点で統一的に議論するために既知の様々な結果を再構築している。これが進展することで、粒子系と平均場を統一した枠組みのもと議論することが可能となり、「二つの極限操作の順序による差異の解析」に近づくことができると期待している。平衡状態を表す非線形楕円型方程式は、多様に知られている。このような視点により、非線形楕円型方程式の理論において、新たな問題意識を導入することができると期待している。

平均場方程式の基礎研究については、佐藤友彦氏(日本大学)との共同研究により、次のような進展が得られた('24 Nonlinear Analysis)。簡略化された変数係数平均場方程式(変数係数

Gel'fand 問題)の線形化作用素について、これまで解析されていなかった固有値の漸近挙動を解析し、新たな情報を得た。具体的には、変数係数 Gel'fand 問題の解が  $n$  点爆発に十分近いとき、その線形化作用素の第 1 ~ 第  $n$  固有値が、爆発を特徴付ける Hamiltonian から定まる  $n \times n$  行列の固有値の挙動で制御されること示すことができた。これは、定数係数 Gel'fand 問題では知られていたことであり、結論が摂動に関して安定なものであることが確認できた。ここで得られた結果は、これまで考えられていた粒子系をより一般化するとき有益な情報であると考えている。これまで考察されている粒子系は、粒子系を特徴づける各粒子の強さ(点渦の場合は、渦の循環)が 1 種類の場合が多かった。これを 2 種、3 種などの混合系にすることは自然な拡張であるが、技術的な問題も多く、平均場極限の収束定理についても、平均場の存在証明についても、必ずしも進展していない。今回の結果は、渦の強さが一定であることが Hamiltonian の観点から意味があり、そこからの摂動については特別な可能性があることを示唆していると考えている。

以上、計画通りに研究を進め、ある程度の成果を得たが、解明を目指した「二つの極限操作の順序による差異の解析」を達成するには十分な結果は得られなかった。しかし、本研究を通して得られた知見は、引き続き本研究を続ける妥当性を大いに示唆するものであり、既に計画方法を大幅に再構築し、目標に近づきつつあると考えている。これも成果の一つであると考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ohtsuka Hiroshi, Sato Tomohiko	4. 巻 240
2. 論文標題 Refinement of asymptotic behavior of the eigenvalues for the linearized Liouville-Gel'fand problem	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 113464 ~ 113464
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2023.113464	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 大塚浩史
2. 発表標題 Refinement of asymptotic behavior of the eigenvalues for the linearized Liouville-Gel'fand problem
3. 学会等名 第15 回名古屋微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 Mean field theory of vortices, revisited
3. 学会等名 Functional Inequalities and Asymptotic Analysis of Nonlinear Elliptic Equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 Mean field theory of vortices, revisited
3. 学会等名 Functional Inequalities and Asymptotic Analysis of Nonlinear Elliptic Equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大塚浩史
2. 発表標題 Refinement of asymptotic behavior of the eigenvalues for the linearized Liouville-Gel'fand problem
3. 学会等名 第15 回名古屋微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 On a microscopic view of the stationary states of the elliptic-parabolic chemotaxis model
3. 学会等名 First Franco-Japanese Workshop on Chemotaxis Models -- Macroscopic and Microscopic Viewpoints -- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大塚浩史
2. 発表標題 Hydrodynamic boundary value problems of mean field equations
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 「偏微分方程式の幾何的様相」 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大塚浩史
2. 発表標題 平衡点渦系の数学理論：平均場と線形応答
3. 学会等名 東北大学数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 On the linear response of equilibrium vortices
3. 学会等名 TU/e - KU Math Symposia (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 On the linear response of equilibrium vortices
3. 学会等名 CASA Colloquim, Eindhoven University of Technology (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>OHTSUKA, Hiroshi  <a href="https://ridb.kanazawa-u.ac.jp/public/detail_en.php?id=4197&amp;page=2&amp;org2_cd=340200">https://ridb.kanazawa-u.ac.jp/public/detail_en.php?id=4197&amp;page=2&amp;org2_cd=340200</a>          大塚浩史のホームページ  <a href="http://www.bea.hi-ho.ne.jp/pickles/mp/">http://www.bea.hi-ho.ne.jp/pickles/mp/</a></p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	佐藤 友彦  (Sato Tomohiko)  (50397676)	日本大学・生産工学部・准教授    (32665)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	八柳 祐一  (Yatsuyanagi Yuichi)  (30287990)	金沢大学・GS教育系・教授    (13301)	
研究協力者	羽鳥 尹承  (Hatori Tadatsugu)	核融合研究所・名誉教授    (63902)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オランダ	Eindhoven University of Technology			