

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03680

研究課題名（和文）臨界べき非線形分散型方程式の漸近解析

研究課題名（英文）Asymptotic analysis of nonlinear dispersive equations with critical nonlinearities

研究代表者

林 仲夫（Hayashi, Nakao）

東北大学・理学研究科・特任教授

研究者番号：30173016

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：分数冪非線型シュレディンガー方程式、分数冪Korteweg-de Vries方程式の解の安定性の研究を行い、解の漸近的振る舞いに与える、非線形項の影響を明らかにした。また質量保存則を満足する非線形分散型方程式の解が自己相似解の近傍で安定であることを示した。これらの研究において発展作用素をいくつかの作用素に分解し、その作用素の性質を調べることが有用であることを示した。非線形シュレディンガー方程式の非線形境界値問題の研究を行いスケール不変な空間において時間大域解の存在を示した。ここではフーリエ変換を用いて積分方程式の時空間評価を行い成果の証明に用いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

流体力学の研究、量子力学の研究で用いられる方程式の多くは、非線形項が臨界冪である方程式であり、非線形項、初期値が解の性質に影響を与えることが知られている。一方、解の漸近的振る舞いにこれらがどのように現れるかなど、明らかにされていない点も多い。我々は発展作用素に対する因数分解公式の方法を用いて、臨界べき非線形シュレディンガー方程式の解の漸近的振る舞いを明らかにした。この方法がより広い非線形分散型波動方程式に応用可能であることを擬微分作用素の有界性定理を用いた研究成果で示したことは学術的意義であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：We studied asymptotic behavior of solutions to fractional nonlinear Schrodinger equations and fractional Korteweg-de Vries equations. The effect of nonlinearities to the asymptotic behavior of solutions was shown. We also studied nonlinear dispersive equations satisfying mass conservation law and the solutions were stability in the neighborhood of self-similar solutions. In these studies, we decomposed the evolution operators into some operators and consider each operator carefully to apply the proofs of our results. This method is called the factorization technique and used in the study of nonlinear dispersive equations. Initial boundary value problem for nonlinear Schrodinger equations was considered and global existence in time of solutions was shown in a scale invariant space.

研究分野：Nonlinear dispersive equations

キーワード：非線形シュレディンガー方程式 臨界べき非線形項 解の漸近的振る舞い 非斉次境界値問題 散乱問題 非線形境界値問題 自己相似解

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

解の漸近的振る舞いを調べることは自然現象を理解する上で重要な問題であり、藤田 (非線形放物型方程式), Strauss (非線形波動方程式), Ginibre-Velo, 小澤 (非線形 Schrödinger 方程式), John (非線形波動方程式) に始まり現在も林 (研究代表者), Li (海外共同研究者), Kaikina (海外共同研究者), Naumkin (海外共同研究者) による非線形 Schrödinger 方程式, 非線形 Klein-Gordon 方程式を含む非線形分散型波動方程式及びその連立系の研究をはじめ, 多くの研究者によって研究が行われている. 解の漸近的振る舞い, 時間減衰評価に関する研究においては Ginibre-Velo による擬保存料の発見, Klainerman によるベクトル場法, Shatah による標準形理論, 小澤による臨界型非線形 Schrödinger 方程式の修正波動作用素の存在証明に利用された近似解の発見, 小澤の結果を拡張した, 研究代表者, 海外共同研究者 Naumkin による新しい近似解の発見等, 多くの道具が開発され研究の発展に寄与した. また, 解の適切性を保証する最も広い空間の研究が高岡, 岩淵, 小川により精力的に行われている. しかしこれらの空間における, 解の漸近評価に関する結果は得られていない.

2. 研究の目的

量子力学, 或いは流体力学の研究で用いられる非線形 Schrödinger 方程式についての研究を行う. 非線形 Schrödinger 方程式は非線形項が臨界冪であるとき, 非線形項が解の性質に影響を与え, 精密な解析が必要となる. 本研究では2つの研究課題, (1): 非斉次初期値境界値問題. (2): 従来考えられてきた空間とは異なる空間における初期値問題, 終値問題の研究を行う. (1) に関しては, 時間局所解の存在, 時間大域解の存在, 解の漸近的振る舞い, 境界条件と非線形項が解の振る舞いに与える影響の解決を目的とする. (2) に関しては, 終値問題に関する結果を除いて, 局所解の存在すら十分な結果がない. そこで我々は初期値問題に対する局所解の存在, 終値問題に対する大域解の存在, 漸近的振る舞い, 散乱問題の解決を目的とする.

3. 研究の方法

海外共同研究者 Naumkin, Kaikina, Li, 国内共同研究者, Ogawa, Sato との共同研究を継続して行い問題の解決をはかった. そのために国内共同研究者と非斉次初期値境界値問題のセミナーを東北大学で定期的に関き意見交換を行った. 海外共同研究者とは Zoom 会議を通して情報の交換および問題の方向に関する検討, お互いの計算結果の精査を行い, 成果を論文として纏めた. 研究会において成果を積極的に発表し, 成果の発信に務めた. 研究会出席者との意見交換により成果の学術的意義の検討を行った.

4. 研究成果

2020 年度: (1): 臨界べき非線形項を持った 2 次元 Schrödinger 方程式の非斉次 Dirichlet 境界値問題を半空間で考察し, 境界条件が摂動と考えられる条件のもと解の漸近的振る舞いを明らかにした. この結果は Kyushu J. Math., (2), 74 (2020), August, 375-400, において公表されている.

(2): 1 次元, 非線形 4 次 Schrödinger 方程式の研究を行い, 非線形項の階数が 5 を超えているとき散乱作用素の存在を証明した. 非線形項の階数が 5 の場合は散乱作用素の非存在がわかっているのでこの結果は散乱問題の立場から最良の結果と思われる. この結果は Hokkaido Math. J. 50 (2021), 91-109, において公表されている.

(3) : 2次元, 非線形4次 Schrödinger 方程式の研究を行い, 非線形項の階数が臨界べき, すなわち2次るとき解の漸近的振る舞いが線形問題の解と異なることを証明した. この結果は Tohoku Math. J. (2) 72 (2020), no. 1, 15-37., において公表されている.

(4): 1次元, 非線形 a 次 Schrödinger 方程式の研究を行い, a が $1 < a < 3/2$, 非線形項の階数が臨界べき, すなわち3次るとき解の漸近的振る舞いが線形問題の解と異なることを証明した. この結果は Adv. Differential Equations 25 (2020), no. 1-2, 31-80. において公表されている.

(5) : 1次元非線形 Schrödinger 方程式の非斉次 Dirichlet 境界値問題を半直線において考察し, 解の存在及び時間減衰評価を示した. 従来の結果では初期値, 境界値にたいして大きさの条件を必要としていたが, この条件を初期値問題で用いられた擬保存料を利用することによって取り除いた. この結果は Nonlinear Differ. Equ. Appl. 27, 17 (2020) において公表されている.

2021年度: (1): 臨界べき非局所非線形項を持った1次元非線形 Schrödinger 方程式の解の漸近系を求めた. この結果は Z. Angew. Math. Phys. (2022) 73:2, <https://doi.org/10.1007/s00033-021-01635-2> において公表されている.

(2): 非線形 Schrödinger 方程式を上半平面で考え, 非斉次 Dirichlet 境界値問題を考え, 解の存在に関して議論した. この結果は SN Partial Differential Equations and Applications, <https://doi.org/10.1007/s42985-021-00120-9> において公表されている.

(3): 2の問題を非斉次 Neumann 境界値問題で考察した. この結果は Differential Integral Equations, 34 (2021), 641-674 において公表されている.

(4): 高次非対称非線形 Schrödinger 方程式を2次元空間で研究し, 非線形項が臨界べきであるとき, 解の漸近的振る舞い, 修正散乱状態の存在を示した. この結果は J. Math. Phys. 62, 071502 (23pages) (2021), online July, 2021, <https://doi.org/10.1063/5.0052299> において公表されている.

(5): 高次非線形 Schrödinger 方程式の修正散乱問題の研究を行った. この結果は J. Evol. Equ. (2021), <https://doi.org/10.1007/s00028-021-00723-0> において公表されている.

2022年度: (1): 非線形熱方程式を非線形境界条件下で研究し, 解の漸近的振る舞い及び解の有限時間爆発について明らかにした. この結果は Asymptotic Analysis ,130 (2022) 261-295, <https://doi.org/10.3233/ASY-211751> に掲載されている.

(2): 分数冪非線形シュレディンガー方程式の初期値問題の研究を分数冪が $3/2$ と 2 の間にあるときに行い, 修正散乱現象が起こることを示した. この事実は3次の非線形項が臨界冪であることを示している.

(3): 分数冪非線形シュレディンガー方程式の初期値問題の研究を分数冪が 2 と $5/2$ の間にあり非線形項が反発項として働くときの研究を行い, 解の漸近的振る舞いが通常の非線形シュレディンガー方程式の解の振る舞いと異なることを示した. 上述の結果と合わせると分数冪の階数が 2 を一つの臨界値となっていることを示している. この結果は J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. (2022) 13:30, <https://doi.org/10.1007/s11868-022-00460-z> に掲載されている.

(4): 2次の非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式の周期問題を研究し, 初期値が周期条件を満たし小さいとき, 解の時間減衰評価を明確にした. この結果は Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 30, Article number : 23 (2023) に掲載されている.

(5): 分数冪 modified Korteweg-de Vries 方程式の解の振る舞いについて, 分数冪の階数が 2 と 4 にあるとき研究を行い, 初期条件が零質量条件を満たし小さいとき, 解の漸近公式を示した. 階数が 3 のときが古典的な modified Korteweg-de Vries 方程式, 階数が 2 のときが modified Benjamin-Ono 方程式と呼ばれるものである. 階数が 2 のときは未解決問題として残されていることを注意しておく. この結果は Partial Differential Equations and Applications (2022) 3:76, <https://doi.org/10.1007/s42985-022-00206-y> に掲載されている.

(6): Hartree type の非線形項を持つ非局所シュレディンガー方程式の初期値問題の研究を一次元空間で行い, 従来の研究で用いられた発展作用素の因数分解公式が, 修正を加えることによりより一般の問題に対しても援用できることを示した. この結果は J. Evol. Equ. (2023) 23:1, <https://doi.org/10.1007/s00028-022-00852-0> に掲載されている.

(7): 一次元シュレディンガー方程式の非線形 Neumann 境界値問題の研究の研究を行い, 冪乗型非線形項の階数が 2 を超えるとき, スケール不変な空間において時間大域解の存在を示した. また階数が 1 と 2 の間にあるとき小さい解が有限時間爆発することを示した. この事実は 2 次の非線形項が臨界指数であることを示している. この結果は Nonlinear Analysis 230 (2023) 113229 に掲載されている.

2024 年度: (1): 微分型シュレディンガー方程式のラプラス作用素を分数冪微分に変換した方程式の初期値問題の考察を行い, 解の漸近的振る舞いを明らかにした. この結果は J. Math. Anal. Appl. 525 (2023) 127222, <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127222> に掲載されている.

(2): 修正 Korteweg-de Vries 方程式の線形部分にあたる Airy 方程式の 3 階微分を分数冪微分に変換した方程式の初期値問題の考察を行い解の漸近的振る舞いを明らかにした. この結果は J. Evol. Equ., 23, Article number: 61 (2023) <https://doi.org/10.1007/s00028-023-00910-1> に掲載されている.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計16件（うち査読付論文 16件 / うち国際共著 16件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Hayashi Nakao, Kaikina Elena I., Naumkin Pavel I., Ogawa Takayoshi	4. 巻 130
2. 論文標題 Nonlinear Neumann boundary value problem for semilinear heat equations with critical power nonlinearities	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 261 ~ 295
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3233/ASY-211751	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hayashi Nakao, Mendez-Navarro Jesus A., Naumkin Pavel I.	4. 巻 13
2. 論文標題 Asymptotics for the fractional nonlinear Schredinger equation with $2 < \alpha < 5/2$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications	6. 最初と最後の頁 13:30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11868-022-00460-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hayashi Nakao, Naumkin Pavel I.	4. 巻 30
2. 論文標題 Large time asymptotics of solutions to the periodic problem for the quadratic nonlinear Schredinger equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-022-00830-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hayashi Nakao, Naumkin Pavel I., Sanchez-Suarez Isahi	4. 巻 3
2. 論文標題 Large time asymptotics for the fractional modified Korteweg-de Vries equation with $\alpha \in (2,4)$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 3:76
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42985-022-00206-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Mendez-Navarro Jesus A., Naumkin Pavel I.	4. 巻 23
2. 論文標題 Modified scattering for the higher-order nonlinear Schredinger equation with the Hartree-type nonlinearity	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 23:1
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-022-00852-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Li Chunhua, Ogawa Takayoshi, Sato Takuya	4. 巻 230
2. 論文標題 Critical exponent for global existence of solutions to the Schredinger equation with a nonlinear boundary condition	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 113229 ~ 113229
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2023.113229	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Naumkin Pavel I.	4. 巻 73
2. 論文標題 Modified scattering for the nonlinear nonlocal Schredinger equation in one-dimensional case	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00033-021-01635-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Kaikina Elena I., Ogawa Takayoshi	4. 巻 2
2. 論文標題 Inhomogeneous Dirichlet boundary value problem for nonlinear Schredinger equations in the upper half-space	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s42985-021-00120-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Kaikina Elena I., Ogawa Takayoshi	4. 巻 34
2. 論文標題 Inhomogeneous Neumann boundary value problem for nonlinear Schredinger equations in the upper half-space	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Differantai and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 641-674
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Naumkin Pavel I.	4. 巻 62
2. 論文標題 Modified scattering for the higher-order anisotropic nonlinear Schredinger equation in two space dimensions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 071502 ~ 071502
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/5.0052299	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Naumkin Pavel I.	4. 巻 21
2. 論文標題 Modified scattering for higher-order nonlinear Schredinger equation in one space dimension	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 4469 ~ 4490
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-021-00723-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Kaikina Elena I., Ogawa Takayoshi	4. 巻 27
2. 論文標題 Dirichlet-boundary value problem for one dimensional nonlinear Schredinger equations with large initial and boundary data	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 17
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-020-0618-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Naumkin Pavel	4. 巻 25
2. 論文標題 Large time asymptotics for the fractional nonlinear Schredinger equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Adv. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 31-80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Naumkin Pavel	4. 巻 72
2. 論文標題 Higher-order nonlinear Schredinger equation in 2D case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J. (2)	6. 最初と最後の頁 15-37
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Naumkin Pavel, Kawahara Yuichiro	4. 巻 50
2. 論文標題 Scattering operator for the fourth order nonlinear Schredinger equation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Hokkaido Math. J.	6. 最初と最後の頁 91-109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/2018-907	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hayashi Nakao, Kaikina Elena I.	4. 巻 74
2. 論文標題 Inhomogeneous Dirichlet-boundary value problem for two dimensional quadratic nonlinear Schredinger equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyushu J. Math., (2)	6. 最初と最後の頁 375-400
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.74.375	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Hayashi, Nakao
2. 発表標題 Critical exponent of small solutions to the nonlinear Schrödinger equation with a nonlinear Neumann boundary condition
3. 学会等名 調和解析と非線形偏微分方程式, RIMS研究集会（公開型）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hayashi, Nakao
2. 発表標題 分数冪非線形シュレディンガー方程式の初期値問題と解の漸近的振る舞い
3. 学会等名 東北大学談話会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Nakao Hayashi
2. 発表標題 Asymptotics of solutions to the fractional nonlinear Schrödinger equation
3. 学会等名 The 19th Linear and Nonlinear Waves（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Nakao Hayashi
2. 発表標題 Self-similar character of the large-time asymptotics of solutions to the derivative fractional nonlinear Schrödinger equation
3. 学会等名 北海道大学偏微分方程式セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takuya Sato
2. 発表標題 The initial boundary value problem of nonlinear Schredinger equations with a nonlinear Neumann boundary condition
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hayashi, Nakao
2. 発表標題 Initial boundary value problem for nonlinear Schredinger equations
3. 学会等名 The 23rd Northeast Conference on Mathematical Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hayashi, Nakao
2. 発表標題 Inhomogeneous Neumann boundary value problem for nonlinear Schredinger equations in the upper half space
3. 学会等名 Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation, 2021, 東北大学 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hayashi, Nakao
2. 発表標題 Inhomogeneous Neumann-boundary value problem for nonlinear Schredinger equations with a power nonlinearity
3. 学会等名 東北大学 応用数理解析セミナー, 東北大学(仙台市) (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation, 2023	開催年 2023年～2023年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------