様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月 ２６ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ０３６８１

研究課題名（和文）非コンパクトなエネルギー構造をもつ臨界型方程式のプロファイル分解による解析

研究課題名（英文）On the analysis of critical type equation involving a noncompact structure from the profile-decomposition point of view

研究代表者
石渡　通徳（Ishiwata, Michinori）

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号：３０３５０４５８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：自然や社会にみられる様々な現象は非線型であるため、その数理モデルは非線型偏微分方程式となり、解析には数学の力が欠かせない。既存の研究のほとんどは、有限自由度系である常微分方程式の有界な解に対する力学系理論を、解軌道の相対コンパクト性を仮定して直接拡張するものであり、無限次元系である偏微分方程式の有界な解の挙動をあたえるものにはなっていない。この点を改良するため、無限次元空間内の有界列に関するプロファイル分解を抽象力学系理論に組み込み、従来の無限次元力学系理論を拡張する。また例として、非有界領域で定義された半線型放物型方程式の時間大域解の漸近挙動、及び付随する臨界型函数不等式を扱う。

研究成果の学術的意義や社会的意義
現代社会に生じる様々な現象はそのほとんどが非線型であるため、これらの予測には数学の力が欠かせない。応用的にはこれらの数理モデルの計算機シミュレーションが有効な方法の一つであるが、数値シミュレーションにより得られる結果は数値の集合体であり、適切な理論的枠組みから解釈しない限り「why」を理解することは難しい。さらに連続体の数理モデルは無限自由度を持つため、数理モデルの解析には「非線型性」と「無限次元性」を扱う適切な枠組みを考えることが重要である。本研究では、この枠組みとして、有限自由度系に対する力学系理論のプロファイル分解を用いた無限次元バージョンの開発、及びその周辺の数理的課題を扱った。

研究成果の概要（英文）：Since various phenomena found in nature and society are nonlinear, their mathematical models are nonlinear partial differential equations, and mathematical power is indispensable for their analysis. Most of the existing studies directly extend dynamical systems theory to bounded solutions of ordinary differential equations, which are systems of finite degrees of freedom, by assuming relative compactness of solution trajectories, and do not provide the behavior of bounded solutions of infinite-dimensional partial differential equations. To improve this point, we incorporate the profile decomposition for bounded sequences in infinite dimensional spaces into the abstract dynamical systems theory and extend the conventional infinite dimensional dynamical systems theory. As an example, we treat the asymptotic behavior of time-global solutions of semilinear parabolic equations defined in a non-bounded domain and the associated critical-type functional inequalities.

研究分野：非線型解析

キーワード：非線型解析　無限次元力学系　非コンパクト軌道　プロファイル分解　時間大域的漸近挙動

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

1.　研究開始当初の背景

自然や社会においては様々な現象が生じるが、現実に起こる非自明な現象はほとんどが何らかの意味での「拡散」「反応」が共存するために起こる。「拡散」「反応」が共存する現象に対する数理モデルとして典型的なものは、主要項として「拡散」を表現するラプラシアン、非線型項として「反応」を表す冪型非線型項をもつ偏微分方程式である半線型放物型方程式である「反応拡散方程式」である。このクラスの方程式は多くの社会現象・自然現象の標準的モデルであるため、理論・応用双方の観点から盛んに研究が進められてきた。

方程式の持つ「拡散」「反応」項の相互作用により、反応拡散方程式は、その見かけの単純さにも関わらず豊かな数理を含んでいる。特に解の時間発展として、次の三つの範疇があることがこれまでの研究によって明らかになってきた。一つ目は、初期値が十分小さい場合の漸近挙動である。この場合は「反応」効果に対して「拡散」効果が優越するため、解は時間大域的に存在し、十分時間がたった後の挙動は線型拡散方程式によって支配される。一方初期値が十分大きい場合は「拡散」効果に対して「反応」効果が優越するため、解は有限時間で爆発し、多くの場合その挙動は拡散項を無視した常微分方程式の解に漸近することが知られている。これらはいずれも拡散方程式やべき型常微分方程式によって解の挙動の主要部が記述される場合である。反応と拡散の共存効果による、非線型偏微分方程式ならではの非自明現象は、中程度の大きさの初期値から出発する解に見られる。この場合解軌道は非自明な状態遷移を示す場合が典型的であるが、特に方程式に付随する「エネルギー構造」(「リャプノフ構造」「変分構造」ともいう)が存在する場合には、こうした解軌道はエネルギー汎関数の臨界点に時間がたつにつれ漸近するという「平衡化」を示す。これは系の時間発展が非自明な平衡状態に漸近することを意味し、自然現象や社会現象の多様性をコントロールしているといってもよい。従って「非自明な漸近挙動を取る時間大域解の解析」は、非線型偏微分方程式論の大きなテーマの一つとして、これまでにも多くの研究がある。

非線型偏微分方程式の解析にあたっての純粋数学的な枠組みの多くは、常微分方程式に対する純粋数学的理論の拡張として捉えられる。より詳しくは、偏微分方程式と常微分方程式の解析における数理的な相違のうち最も大きなものは、常微分方程式の解の相空間は有限次元空間である一方、偏微分方程式に対するそれは無限次元空間である点であるため、偏微分方程式に対する理論は常微分方程式に対するそれの無限次元版と見做せる。時間局所解の構成については、常微分方程式において有効に働いていた不動点定理を用いる方法が、偏微分方程式に対しても有効であることが、日本人研究グループの研究を始めとして証明されており、現在では半群理論として抽象化されている。一方で常微分方程式の有界な解の漸近挙動は、リャプノフ関数を持つ場合には定常解への漸近であることが知られており、この結果は抽象力学系理論として一般論が展開されている。この漸近・収束には「有界な集合（解軌道）は相対コンパクトである」というボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理が本質的な役割を果たすが、無限次元空間ではこの定理は一般に成り立たないため、常微分方程式に対して有効な抽象力学系理論はそのままでは偏微分方程式に対しては直接は適用できない。

無限次元力学系の漸近挙動については、解軌道が相対コンパクトである解に対しては有限次元の場合とほぼ同様の理論が展開されている。自然現象や社会現象を記述する、応用上重要な多くの偏微分方程式の解軌道はコンパクトになることを示すことができ、解軌道のコンパクト性の確立自体が偏微分方程式論の重要な一分野を成している。しかし無限次元空間では「有界だがコンパクトでない」集合が存在し、解軌道が相空間の中でこのようなクラスの場合には既存の無限次元力学系理論は適用できない。こうした解軌道を持つ偏微分方程式は「臨界型」と呼ばれるが、このクラスの方程式に対する解析はあまり進展していなかった。一方で 1980 年代より、調和写像の存在問題、平均曲率一定曲面の存在問題、古典的ヤン・ミルズ場の存在問題、山辺の問題といった幾何学的変分問題を代表例として、上記の「コンパクト性パラダイム」の枠内では十分な解析が困難な方程式群が同時多発的に発見された。これらはすべて非コンパクト群作用の下で方程式が不変である構造をもっている。群作用がコンパクトな場合には多重臨界点の存在など、解析的に意味のある結果が多く導かれるが、非コンパクトな場合には、軌道のコンパクト性を前提とする諸理論のほとんどが有効ではなくなるため、個別のテクニックを適用した部分的知見が導かれる状態であり、「非コンパクト群作用のもとでの不変性」という数学的構造が「方程式の解の漸近挙動」に齎す効果を解析する枠組みは存在していなかった。

こうした中で 1990 年代に、函数解析的観点から、無限次元ヒルベルト空間の中での有界列の一般的挙動を扱う抽象論が発展してきた。ヒルベルト空間の有界列は弱収束することは知られているが、新たに発展してきた抽象論は「プロファイル分解」と呼ばれ、この拡張を与える。プロファイル分解は、ノルムが非コンパクト群作用の下での不変性を持つ特殊な場合は、この群作用に付随して、弱位相よりも強い位相が導入でき、任意の有界列は、無限個のプロファイルを引き抜いた後ならこの位相で収束するというものである。この群構造は上記の臨界型偏微分方程式に共通にみられる構造であり、臨界型方程式の解の漸近挙動に対する抽象論の構築可能性を強く示唆するものであるが、こうした観点からの研究はほとんど存在していなかった。

２．研究の目的

１．で述べた通り、関数解析分野で抽象的な研究が進んでいるプロファイル分解の手法を、楕円型方程式、放物型方程式及びこれらに付随する関数不等式のうち、非コンパクト性を内包するものについての一般論を展開することを狙う。

① 方程式が定義されている領域が非有界であるために解軌道のコンパクト性が破れる「非有界劣臨界型放物型偏微分方程式」

を例に取り、

② 軌道が有界かつ非コンパクトな場合の抽象力学系理論の展開可能性

を考えた。また付随して、①の非コンパクト性の数理を探求するため

③ ①の背景にある、非有界領域上の臨界 Trudinger-Moser 型関数不等式に付随する最大化問題

も考察した。本研究では以上 3 つの研究テーマを置いて研究を進めた。

３．研究の方法

①については、従来の研究と異なり、非線型項が必ずしも冪型ではない場合も含めて扱うので、まずエネルギー構造に付随する安定集合と不安定集合の存在を示す必要がある。これについてはミラノ大の研究グループと行った、指数型非線型項を持つ半線型放物型方程式に対する安定集合と不安定集合の存在についての論法が援用できる。また時間大域解の漸近挙動については、エネルギー構造から、無限大に発散する任意の時刻列に対し、その時刻列の近傍に、解がそれに沿って変分汎関数のパレ・スメール列になるような時間列が存在することが示せる。これを用いると、最初に取った時刻列に沿った解の列もエネルギー汎関数のパレ・スメール列になることが示せる。これにより、解の列をプロファイル分解したときの各プロファイルの特徴づけが得られる。以上のシナリオがべき型非線型項とは限らない場合にも有効であるかどうか、特に非斉次関数または指数関数である場合について検討する。

この問題の背景には空間高次元における臨界ソボレフ不等式に付随する関数空間の埋め込みの非コンパクト性がある。この変分問題は空間の非有界性とノルムの平行移動不変性に由来する「逃げ去り」現象と、空間の非有界性とノルムのスケール不変性に由来する「凝集」現象の二つの非コンパクト性に関わる現象を内包する。同様の構造を持つ空間二次元の問題として、臨界 Trudindger-Moser 型不等式に付随する関数空間の埋め込みの非コンパクト性がある。この変分問題も、空間の非有界性とノルムの平行移動不変性に由来する「逃げ去り」現象と、空間の非有界性とノルムの擬似スケール不変性に由来する「凝集」現象の二つの非コンパクト性に関わる現象を内包し、これを反映して付随する最大化問題の可解性の詳細は解析されていない。③ではこれを、代表者によって開発された解析技法を用いて探求する。

以上の具体的問題の解析を通じ、既存の抽象力学系理論の解の相対コンパクト性を有界性に置き換え、プロファイル分解において与えられる群位相を用いて再定式化することにより、軌道の相対コンパクト性を仮定する既存の抽象力学系理論を拡張することを目指す。

４．研究成果

①については指数関数非線型項、及び非斉次な非線型項をもつ場合について、安定集合と不安定集合の存在、時間大域解のソボレフノルムが時間大域的に有界で、時間無限大での解のプロファイルは、全空間における非自明定常解を平行移動したものが有限個重ね合わさったものになることが示された。また、この結果を用いて、スカラー場放物型方程式の正値解の漸近挙動について、最低励起エネルギーにエネルギー値が収束する場合には、解の符号によらず解軌道のオメガ極限集合は一点のみからなることを得た。

③については、汎関数のコンパクト性を破壊する働きを持つ低階項の大きさを表すパラメータが十分大きな場合には、汎関数の増大度自体は劣臨界であるにもかかわらず最大化問題の解は存在しないこと、及びパラメータが小さい場合には最大化問題が可解であること、また制約条件のパラメータを変化させることによって最大化問題の可解性がドラスティックに変化することが示された。さらに具体的な指数型非線型項を含む一般の増大度をもつ汎関数についてこれらの結果を拡張し、一般的な「消滅・凝集・コンパクト性原理」を得た。

以上の結果は「背景」で述べた、従来の「コンパクト性パラダイム」に代わり、「有界性パラダイム」に基づく解析が有効であること、この新たなパラダイムの下でのコンパクト性の解析は、従来の「コンパクト性定理」ではなく「有界列のプロファイル分解」であるべきことを強く示唆する。

②の抽象論の展開については一応の定式化を与えたが、従来の相対コンパクト軌道を対象とする力学系理論において仮定されている自然なリャプノフ性を、軌道の有界性のみを仮定する場合にどのように定式化するかについて ad hoc な側面があり、この点に不満が残る。しかし①で取り扱ったクラスの偏微分方程式は、この新たに定式化された力学系理論が適用可能であり、具体的な方程式の構造を用いた解析とほぼ同等の結果を得ることができる。

今後の課題として、(1)新たに展開されたこの抽象論のリャプノフ性について、応用が容易かつ理論的に自然な仮定をどのように置くか、(2)これまでに筆者により展開された、臨界ソボレフ指数をもつ半線型偏微分方程式の時間大域解の漸近挙動、及び(3)平均っ曲率一定曲面問題に付

随する熱流の時間大域解の漸近挙動に対して(1)の抽象論を適用可能かどうかの検討が挙げられる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　5件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Wadade, Hidemitsu; Ishiwata, Michinori	4．巻 60
2．論文標題 Vanishing-concentration-compactness alternative for critical Sobolev embedding with a general integrand in R2	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Calc. Var. Partial Differential Equations	6．最初と最後の頁 Paper No. 203
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00526-021-02076-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Chandra, E. W.; Ishiwata, M.; Magnanini, R.; Wadade, H.	4．巻 28, no. 5
2．論文標題 Variational p-harmonious functions: existence and convergence to p-harmonic functions	5．発行年 2021年
3．雑誌名 NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.	6．最初と最後の頁 Paper No. 51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00030-021-00714-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Ishiwata, Michinori; Ruf, Bernhard; Sani, Federica; Terraneo, Elide	4．巻 21, no. 2
2．論文標題 Asymptotics for a parabolic equation with critical exponential nonlinearity	5．発行年 2021年
3．雑誌名 J. Evol. Equ.	6．最初と最後の頁 1677-1716
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00028-020-00649-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Ishiwata, Michinori; Wadade, Hidemitsu	4．巻 257, no. 2
2．論文標題 On the effect of inhomogeneous constraints for a maximizing problem associated with the Sobolev embedding of the space of functions of bounded variation	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Studia Math.	6．最初と最後の頁 213-240
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/sm190613-13-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Ishiwata, Michinori; Ruf, Bernhard; Sani, Federica; Terraneo, Elide	4．巻 MATRIX Book Ser., 3
2．論文標題 A potential well argument for a semilinear parabolic equation with exponential nonlinearity	5．発行年 2020年
3．雑誌名 2018 MATRIX annals	6．最初と最後の頁 265-273
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　4件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 Michinori Ishiwata
2．発表標題 Pseudo-traveling wave decomposition of time-global solutions for semilinear parabolic equations
3．学会等名 応用解析研究会（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Michinori Ishiwata
2．発表標題 On global bounds for semilinear parabolic problem with variable exponent touching the critical Sobolev exponent
3．学会等名 Mini-workshop on Nonlinear Analysis（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2020年

1．発表者名 石渡通徳
2．発表標題 ODE-net の解析学的基礎数理を巡って
3．学会等名 オンライン勉強会：機械学習の数理（招待講演）
4．発表年 2022年

１．発表者名 Michinori Ishiwata
２．発表標題 Asymptotic behavior of time-global solutions for semilinear parabolic equation in the entire domain
３．学会等名 非線型偏微分方程式と走化性（招待講演）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	ミラノ大学			