様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ５ 月 １５ 日現在

機関番号：１５４０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：２０Ｋ０３６８３

研究課題名（和文）ハミルトン系の動く特異点とボレル総和法の研究

研究課題名（英文）Study of a movable singular point of a Hamiltonian system and Borel summability

研究代表者

吉野　正史（Yoshino, Masafumi）

広島大学・先進理工系科学研究科（理）・名誉教授

研究者番号：００１４５６５８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：非線形波動、非線形放物型、非線形シュレディンガー方程式等の特異性をもつ解の構成について研究した。そこで現れるハミルトン系で、初期値によって動く特異点、特に分岐点を持つ解の構成をして、その構造を力学系の視点、すなわちバーコフ変換理論の視点からあきらかにした。主な結果は、動く分岐点がバーコフ型変換を用いて楕円関数からの変換によってあらわれることおよび偏微分方程式に対するボレル総和法理論の拡張をおこなったことである。また、小進化に対応した進化項を持つ３種ロトカボルテラ系にたいし、周期変動に類似の変動が存在することを数値計算でしめした。

研究成果の学術的意義や社会的意義
研究成果の社会的意義は、研究の対象となる方程式達が数理物理での基礎方程式であり、量子論、レーザーなど社会の多くの分野で応用されており、それらに新しい知見を与えた点にある。学術的意義は、今回の研究成果を従来の研究と比較したとき、動く分岐点の存在がバーコフ型変換を用いて楕円関数からの変換によって引き起こされることが示されたこと、さらに証明も解析分野の結果であるボレル総和法を基礎にした見通しの良い議論になっているという点にある。証明で示された偏微分方程式に対する発散解の構成とボレル総和法理論の拡張もボレル総和法分野での新しい応用例を与えた。

研究成果の概要（英文）：We study movable singularity for some Hamiltonian system satisfied by the radially symmetric self-similar solution of the nonlinear wave equation, semi linear heat equation and the nonlinear Schrodinger equation without the so-called Painleve property. We show that there is a movable branch point expressed by the elliptic function and a Birkhoff-type transformation. In proving the fact, we extend a Borel summability theory for a partial differential equation. As an application of the asymptotic theory, we find the new behavior of a solution of the three-species Lotka-Volterra model with an evolutional effect.

研究分野：複素領域の微分方程式、力学系

キーワード：ハミルトン系　動く特異点　超級数　ボレル総和法　超可積分性　接続問題　進化項をもつロトカボルテラ方程式　バーコフ変換

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

ハミルトン系Ｈを考える。動く特異点とはＨに対する初期値問題の解の特異点のうちＨの特異点でなく初期値に依存するものをいう。さて、線型方程式の解は動く特異点を持たない。これに対して、非線型方程式の解は一般に動く特異点を持つ。 動く特異点を持つ方程式の研究において、パンルベ方程式の発見は大きな影響を与えた。パンルベ方程式は動く特異点が高々極に限るというパンルベ性を持つ６つの常微分方程式である。この方程式はその後、数理物理でその重要性が認識された。他方、Yang Mills 方程式からあらわれる Chazy 方程式のように、パンルベ性を持たない方程式で重要な方程式も知られている。このように動く特異点をもつ方程式の研究は興味あるテーマであった。力学系では（非）可積分性がポアンカレ以来、重要なテーマであり、（動く）特異点を持つ解は可積分な方程式を見出すという研究の中で用いられた。パンルベ方程式の発見の頃、コワレフスカヤは剛体運動の系で可積分な系を発見した。この研究では特異点解析という手法が用いられた。すなわち、十分多くの動く分岐点の存在が非可積分性を示唆することを用いて可積分な系を絞り込んだ。この考えに沿った研究の流れはその後発展し、現在に至るまで続いている。例えば、特異性の力学系の立場からの研究としては Chang- Greene- Tabor –Weiss, Physica 8D (1983), 183- 207 ではある種の解の多価性から自然境界の発生が起こることを証明した。この結果は自由度が 2 の自励系のエノン系に適用できることに注意する。また、他の示唆的な問題としてＮ体衝突問題がある。その他、関連した研究として、Filipuk G. and Halburd R. G., J. Math. Phys., 50(2), 2009. および Kecker, T. Journal d'analyse mathematique, 129(2016),197-218 を挙げておく。ここでは、特異点解析を基本にして動く特異点が研究されている。さて申請者の研究で扱う方程式は、非線形波動方程式、非線形放物型方程式、非線形シュレディンガー方程式等の爆発解のうち、球対称自己相似解の満たす方程式である。これらの方程式は量子力学あるいはレーザー等の研究で興味を持たれている。これらの方程式に関して動く分岐点の存在と爆発解の特異性のごく簡単な場合はつぎの論文で研究されている。M. Yoshino, Nonlinear Differ. Equ. Appl. (2019) 26: 8. これに関連した問題として、特異集合についての Leray 氏の提起した問題が知られている。これは特異点集合に関する予想であり、この問題を考察していくとごく自然に、バーコフ変換の一般化をもちいて、動く分岐点の解析と爆発解の特異性についてしらべることが予想される。

２．研究の目的

上の研究開始当初の背景のところで述べたように、本研究では非線形波動、非線形放物型、非線形シュレディンガー方程式等を考える。これらの方程式の爆発解の構成において現れる必ずしもパンルベ性を持たないハミルトン系達の動く特異点、特に動く分岐点の存在とその構造を力学系の視点から研究することが目的である。ここで力学系の視点とはバーコフ変換理論を拡張することを指している。そのための解析手法として偏微分方程式に対するボレル総和法を用いる。この理論の一般化も研究の目的とする。最終年度ではこの偏微分方程式のボレル総和法理論の一般化を実行して、ハミルトン系の超級数解の存在を証明することを目的とする。他方、この漸近理論の応用として小進化に対応した３種ロトカボルテラ方程式系の解の挙動を数値解析的な点から研究することを目的とする。

以下ではこれらの目的のうち、前半について詳しく説明をしていく。パンルベ性を持たない方程式は動く分岐点や動く真性特異点あるいは動く自然境界を持つだろうと予想できる。他方、それらの方程式は２階であり、ハミルトン系としては自由度１の非自励系である。そこで動く自然境界を持たないと予想している。動く真性特異点が現れるかどうかは予測できないが、当面は動く分岐点の存在とその構造について、その性質をあきらかにしていきたい。応用としては上述の数理物理の方程式達の解の爆発の研究に新しい視点を与えると期待できる。とくに Leray の問題にたいし、あまり注目されてこなかった特異点解析、相空間での blow-up、一般化されたバーコフ変換論とボレル総和法によって動く特異点の解析をおこなう。力学系理論の手法をベースにしながら、解析の手段として偏微分方程式の一般化されたボレル総和法をもちいる。 関連する研究として、申請者が研究してきた偏微分方程式に対するボレル総和法の理論をベースにする。このアプローチは、発散解の取り扱いを可能にする解析手法によって、動く特異点の研究をする点に独自性があると考えられる。この際、まず自由度１の非自励系のハミルトン系を取り扱う。この場合、パンルベ性は成立しないが、自由度が１であるので可積分系に近く、おそらく動く自然境界は現れないと予想している。そのような方程式達に対して動く分岐点の構造をしらべる。これについては、より単純な場合であるが、上述の Filipuk G. and Halburd R. G., および Kecker, T. の研究があるので、この結果を参考に進める。他方、動く分岐点の存在は力学系としては非可積分になることが示唆される。よって従来の方法は有効でない可能性が高く、力学系の変換論での発散を解析するため、相空間の blowup と偏微分方程式のボレル総和法を改良して用いる。このためには、ボレル総和法の改良と拡張が必要であるが、これはすでにある程度まで申請者が進めている結果をもとに実行する。またこの研究において楕円関数や超楕円関数を用いた特異点の構造の研究も目的とする。これについては、上述の M. Yoshino, Nonlinear Differ. Equ. Appl. での研究をもとにして実行する。この議論を行ったのち、自由度２のハミルトン系

の動く特異点を研究することを目的とする。一般に Chang- Greene - Tabor - Weiss の結果からこれは動く自然境界を持つので、Chazy 方程式や力学系のエノン写像の理論を参考にしながら研究を進める。

３．研究の方法
本研究では、前述した目的を達成するために、次のような 2 段階でのアプローチをとる。(1) バーコフ変換理論を拡張し、動く分岐点の解析ができるようなハミルトン系に変換して解析を実行する。(2) (1)を実行するため、解析の道具として偏微分方程式に対するボレル総和法の理論を一般化する。(1)に関しては一般化されたバーコフ変換の理論を構成する。これを基にしてバーコフ理論を動く特異点の解析に適用する。自由度が 2 の場合を 1 年目に実行し、一般の自由度の場合についてはあとで検討する。項目(2)に関しては、まず偏微分方程式に対するパラメトリックボレル総和法の理論の構成を行うことを実行し、一般化のための準備とする。これらの準備ののちに、偏微分方程式に対するボレル総和法の理論を一般化して、求めるバーコフ変換の一般化を行う。これを用いて、動く分岐点を持つ解を構成する。これらの結果を数理物理の方程式の解の爆発に応用する。変換の存在域は特異性の形に大きく影響するので、バーコフ型変換が有効な領域の詳細な情報が必要になる。これらのことはボレル和の存在域の詳しい解析から得られる。さらに、楕円関数や超楕円関数を用いた特異点の構造の研究も併せて行う。研究期間の後半では、ボレル総和法の理論を拡張し、複数の動く特異点をもつ解の構成に適用できるような変換論を証明する。これをもとにして、(1)の議論を実行する。バーコフ変換理論もこのような複数の動く特異点の構成が可能になるような一般化を実行する。つぎに、おもに最終年度に実行する研究の方法について述べる。前年度までの研究を通して証明された偏微分方程式のボレル総和法理論の一般化の理論をさらに進めて、ハミルトン系の超級数解の構成と総和可能性を証明する。これらのことはより本質的な超級数のクラスでの超可積分性から従うので後者の証明に取り組む。これは世界の多くの研究者が注目している resurgency の研究に深く関係している。その他、研究期間を通したテーマとして進化生態学への漸近解析の応用の研究方法に関しては、進化項を持つ 3 種ロトカボルテラ方程式系にたいし、小進化の影響による新しいダイナミクスの研究に上述の結果を適用する。得られた成果は、最終年度までに論文としてまとめて公表し、さらに国際会議等で発表する。

４．研究成果　成果は以下のとおりである。
(1) 動く分岐点を持つ解の存在とその性質や構造を知るための基礎理論整備を行い、研究を進めるうえで重要な点である以下の成果を得た。これらは主に１年目に実行され、詳細は以下のとおりである。① バーコフ変換理論を動く特異点の研究に適用する手法の開発。それにより、動く特異点を持つ解を楕円関数等で表示しその構造を知ることが可能になった。より詳しく、バーコフ変換理論を拡張して、動く特異点の構成に使えるような理論構成を行った。さらに楕円関数による 動く分岐点を持つ解の構成法を示した。これらの結果を論文として発表し、広島大学での研究会で研究報告をおこなった。② 研究方法で述べたように、解析的な基礎を与えるある偏微分方程式に対する大域的なボレル総和法を証明した。この証明ではハミルトンヤコビ理論が重要であることがわかった。これをもとにボレル総和法が大域的に適用可能となる変換理論の構成をおこない本研究に利用した。この結果は論文としてまとめてアメリカ数学会から出版した。この内容について国際会議（アルカラ、スペイン）で招待講演を行った。
(2) 変換方程式をボレル総和法によって解くための理論についての一般化。これは 2 年目に主に行った。詳しくは以下の通りである。 ① 数理物理の方程式の特異解の構成においてあらわれるハミルトン系に対し、複数の特異点を持つ解をボレル総和法によって構成した。これらの結果はスペインでの国際会議（FASNET21）で講演（招待講演）し、いくつかの結果と合わせて論文として出版した。さらに、2022 年 3 月に埼玉大学で開催された日本数学会年会の一般公演で講演した。 ② 解析的非可積分なあるハミルトン系に対して、角領域での可積分性を証明した。証明はハミルトン系の第一積分を形式級数として構成し、偏微分方程式に対するボレル総和法を拡張して、角領域での第一積分を構成した。この成果は京都大学数理解析研究所での国際会議(Exact WKB Analysis, Microlocal Analysis)で講演し、論文は同研究所の雑誌から出版した。③ 変換方程式の可解性を楕円関数とボレル総和法を用いて証明した。この結果の意義は、偏微分方程式に対するボレル総和法を大域的に拡張して変換方程式の可解性が証明できたことと複数の動く特異点を持つ解の構成についても変換論によって構成できたことである。これらは(1)および(2)の論文中で解析的な（補助）定理として出版された。
(3) 発散超級数を用いてハミルトン系の超級数形式解を構成し、このような超級数形式解に対するボレル総和法理論を証明した。これを用いることにより、変換方程式の可解性の証明を与えた。詳しくは以下のとおりである。① 解析的非可積分なあるハミルトン系に対して超可積分性を証明した。証明はハミルトン系の第一積分を発散する超級数として構成し、偏微分方程式に対するボレル総和法理論を拡張してもちいた。この結果は京大数理研の別冊に出版した。 ② 変換方程式の可解性を初等関数あるいは超級数とボレル総和法を用いて証明した。すなわち、偏微分方程式に対するボレル総和法を拡張して変換方程式の可解性を証明し、超級数を用いて特異性を持つ解をハミルトン系に対して構成した。結果は京大数理研紀要に出版した。 ③ スペインでの国際会議（FASNET21）での講演内容をまとめて発展させ、論文を作成しアメリカ数学会から出

版した。2022 年 9 月に北大で開催された日本数学会秋季総合分科会の一般公演で報告をした。京都大学の力学系セミナーで研究報告をした。ウルム大学に W. Baser 教授を訪問し同氏および同大学のスタッフと研究討論を行った。同氏とは共同研究で超級数に関する論文を出版済みであるが、同氏は申請者との討論をもとに別の論文を出版し、申請者の研究を引用している。この訪問で、超級数のボレル総和法と接続問題に関する世界の最先端の研究の今後の方向性について情報交換を実行した。それは以下の(5)の研究に生かされた。

(4) 3 種ロトカボルテラ方程式系において、小進化を考慮した項を導入した 3 種ロトカボルテラ系の解析を行った。小進化の存在により、新しい周期変動が存在することを数値計算で示した。実際、理論面ではすでに共著で論文を出版して予想されていたが、今回は wavelette 変換と数値計算をもちいて、進化生態学の視点から、実際の現象あるいはデータに対して小進化モデルの検証をおこなった。小進化の存在により、従来知られていなかったあたらしい周期変動を見出した。この結果は Evolutionary Ecology に出版した。

(5) 申請者の研究では当初、非線形波動方程式等の自己相似球対称特異解の構成から現れるパンルベ性を持たないハミルトン系の動く特異点の研究を目的としていた。研究の過程でバーコフ変換の一般化を用いた。発散をとり扱うため、偏微分方程式の解に対するボレル総和法理論を拡張する必要があった。このボレル総和法の拡張を動機として、4 年目は一般の初期値問題に対応可能な超級数を用いた形式級数解の構成とそのボレル総和可能性の研究を実行した。詳しくは以下のとおりである。① 非可積分なあるハミルトン系に対して超級数第一積分のクラスでの超可積分性を示した。この結果をもちいて、ハミルトン系の超級数形式解のボレル総和可能性を証明した。証明はハミルトン系の第一積分を発散する超級数として構成し、偏微分方程式に対するボレル総和法理論を拡張してもちいた。この結果は Journal of Dynamical and Control Systems に出版した。 ② 2023 年 9 月に Poland の Bedlewo (Banach center) で開催された国際会議で招待講演をおこなった。また、9 月に Banach center (ワルシャワ)で行われた国際研究集会でも招待講演をおこない研究成果を報告した。

(6) 学術的意義。　得られた成果に対する学術的な意義についてまとめて述べる。数理物理にあらわれるハミルトン系に対して動く特異点をもつ解の構成をする手法はすでに知られたもの(例えば特異点解析)が存在するが、今回の研究成果を従来の研究と比較したときの意義は、動く分岐点の存在がバーコフ変換を用いて楕円関数からの変換によって引き起こされるということが示されたこと、さらに証明も、解析の道具であるボレル総和法を認めると、見通しの良い議論になっているという点にある。これを用いて、複数の動く特異点を持つ解の構成が同じやり方で示せることがわかった。また証明で用いた偏微分方程式に対する発散解の構成とボレル総和法理論の拡張もボレル総和法分野での新しい応用例を与えたという点で興味ある。実際、これからハミルトン系の超級数クラスでの超可積分性がしめされ、現在世界的に興味を持たれている超級数理論に新しい知見が得られた。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　6件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　3件）

1．著者名 Masafumi Yoshino	4．巻 782
2．論文標題 Solution with Movable Singular Points of Some Hamiltonian System	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Contemporary Mathematics	6．最初と最後の頁 207-218
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/conm/782/15730	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Masafumi Yoshino	4．巻 60
2．論文標題 Movable Singularity of Some Hamiltonian Systems Associated with Blowup Phenomena	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Publ. RIMS Kyoto Univ.	6．最初と最後の頁 1-28
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/60-3-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Masafumi Yoshino	4．巻 -
2．論文標題 First Integral of Non-integrable Hamiltonian System	5．発行年 2023年
3．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Masafumi Yoshino	4．巻 -
2．論文標題 Global Borel summability of some partial differential equation	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Proceedings of "Formal and Analytic Solutions of Differential Equations", World Scientific Publishing Europe Ltd.	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/q0335	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Yoshinari Tanaka and Masafumi Yoshino	４．巻 -
２．論文標題 Eco-evolutionary feedback as a driver of periodic state shifts in tri-trophic food chains	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Evolutionary Ecology	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10682-023-10278-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Masafumi Yoshino	４．巻 -
２．論文標題 Summability of Transseries Solution of Non-integrable Hamiltonian System	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Journal of Dynamical and Control Systems	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10883-024-09692-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　5件／うち国際学会　5件）

１．発表者名 Masafumi Yoshino
２．発表標題 Movable singular point of solution of some Hamiltonian system
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会
４．発表年 2022年

１．発表者名 Masafumi Yoshino
２．発表標題 Multiple movable singularity of some Hamiltonian system -Application of Borel summability-
３．学会等名 FASnet21 -Alcala Spain-（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 Masafumi Yoshino
２．発表標題 Singular solution of non-integrable Hamiltonian system
３．学会等名 Exact WKB Analysis, Microlocal Analysis, Painleve Equations and Related Topics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 Masafumi Yoshino
２．発表標題 Movable singular point of non autonomous Hamiltonian system of degree of freedom one
３．学会等名 日本数学会年会
４．発表年 2022年

１．発表者名 Masafumi Yoshino
２．発表標題 Parametric Borel summability of a certain PDE
３．学会等名 FASdiff20 (Alcala, Spain)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2020年

１．発表者名 Masafumi Yoshino
２．発表標題 Movable singular point of solution of some Hamiltonian system
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会
４．発表年 2023年

１．発表者名 Masafumi Yoshino
２．発表標題 Singular solution of non-integrable Hamiltonian system
３．学会等名 COMPLEX DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS II, Banach center（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Masafumi Yoshino
２．発表標題 Connection problem for transseries solution and first integral
３．学会等名 Polish-Japanese workshop on differential equations in the complex domain(Banach center)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://home.hiroshima-u.ac.jp/yoshinom/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関