

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03685

研究課題名（和文）非線形放物型偏微分方程式における定常構造および自己相似性と解の挙動

研究課題名（英文）Stationary structure, self-similarity, and the behavior of solutions in nonlinear parabolic partial differential equations

研究代表者

内藤 雄基 (Naito, Yuki)

広島大学・先進理工系科学研究科（理）・教授

研究者番号：10231458

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：一般の優 Sobolev 臨界非線形項を持つ楕円型方程式における特異解について考察を行い、特異解の存在、特異解の原点近傍における漸近挙動および特異解の一意性を明らかにすることができた。これらの結果は、べき乗型や指数型を含む広範な非線形方程式に適用可能である。空間高次元における放物-楕円型走化性方程式系の初期値問題の正值解の挙動について考察を行った。方程式系の定常解を用いることにより、解が時間大域的に存在するための条件および有限時刻爆発するための条件を導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

広いクラスの非線形楕円型偏微分方程式に対して、特異解の定性的性質を明らかにすることができた。走化性方程式系において、空間10次元以上の場合、Morrey 空間におけるノルム評価を用いた条件が最適であることを示すことができ、一方、空間3次元以上9次元以下では、既存の評価が最適ではなく改善の余地があることを示すことができた。

研究成果の概要（英文）：We consider positive radial singular solutions of semilinear elliptic equations with general supercritical growths. We establish the existence and exact asymptotic expansions of the singular solutions as well as its uniqueness in the space of radial functions. We can apply these results to a wide class of nonlinearities in a unified way. We study the simplest parabolic-elliptic model of chemotaxis in the spaces with higher dimensions. We show the optimal conditions on the initial data for the finite time blow-up and the global existence of solutions in terms of stationary solutions.

研究分野：数物系科学

キーワード：非線形解析 非線形楕円型偏微分方程式 特異解 優 Sobolev 臨界 走化性方程式系 自己相似解

1. 研究開始当初の背景

非線形問題においては、解の値が有限時刻で無限大に発散したり、初期値や方程式に含まれるパラメータをわずかに変えるだけで解の挙動や性質が大きく変化する現象が多く知られている。そのような現象に対する考察では、スケール不変性などの方程式のもつ性質や、定常問題の解構造が重要な働きをすることが知られている。

非線形楕円型偏微分方程式の特異解は、その方程式の解全体の構造の考察において重要であることは知られていたが、特異解定性的性質は、方程式の非線形性と密接に関係しており、一般的な手法や性質は明らかではなく個別に考察する必要があった。

Sobolev 優臨界の方程式は、非線形性が強いいため、Sobolev 劣臨界などの通常の楕円型偏微分方程式で有効であった手法(変分法などの関数解析的な手法や実解析的手法)を適用できないなど、有効な解析手法が乏しい。そのため Sobolev 優臨界の方程式の分岐図式などの解構造については未知の部分が大きかった。

非線形熱方程式はスケール不変性をもっており、自己相似解は、相似変換を用いて書き直した方程式の定常解としてとらえることができる。先行研究により、前方型自己相似解に対して変分的手法および常微分方程式論からのアプローチにより、Gelfand 構造と呼ばれる解構造をもつことを示唆する結果が得られていた。また、非線形熱方程式の定常問題は一意特異解をもっており、この特異定常解は、初期値問題において時間大域解と爆発解の境界にあるなど、非線形熱方程式の解の挙動において重要な働きをすることが知られていた。

非線形項がべき乗関数や指数関数とは限らない一般の非線形項をもつ非線形拡散方程式に対する Cauchy 問題の解の時間局所および時間大域可解性が得られていた。一般の非線形拡散方程式は、自己相似性をもつとは限らないが、自己相似変換を一般化したスケール変換のもとで解の可解性が論じられていた。一般の非線形楕円型方程式の分岐問題も扱われており、ある種の極限方程式は、指数関数型とべき乗関数型に帰着されることが示されていた。

非線形熱方程式の解の特異性の一つの例として「解の爆発」を挙げることができる。解の爆発現象の研究においては、爆発が「いつ」「どこで」「どのように」起こるかといったことが基本的な問題として多く研究されてきており、さらに弱解による解の延長を考えることにより、爆発後の解の状況についても議論されていた。

2. 研究の目的

非線形放物型方程式に対して、解の挙動と定常問題の解構造および自己相似性との関連性について考察を行う。とくに Sobolev 優臨界および Sobolev 臨界の場合において、特異定常解および自己相似解の構造を明らかにするとともに放物型方程式の解の振る舞いに及ぼす影響を考察する。

3. 研究の方法

Sobolev 優臨界における特異定常解の一意存在・漸近的収束性を示し、特異解の周りでの線形化問題から定常問題における分岐構造の分類・特徴付けを行う。Sobolev 臨界においては特異定常解の漸近挙動による分類を行い、特徴的な挙動をもつ特異解を抽出すると共に、関連する関数不等式の精密化を行う。

常微分方程式の手法により、一般の非線形項をもつ定常問題について特異解の一意存在・漸近

の収束性を示す。特異解の周りでの線形化問題においてはポテンシャル項に逆 2 乗のべき関数が現れる。この部分に対しては、常微分方程式に対する精密化された Sturm の比較定理を用い、パラメータに対する連続依存性を示す。

解の体積平均による変換により走化性方程式系をスカラー方程式に帰着する。この変換によるスカラー方程式は、方程式系と空間次元が異なるという性質があるとともに、2 つ以上の特異解をもつという特徴がある。この方程式に対する非有界領域における比較定理を示すとともに、スカラー方程式の特異定常解に対するある種の Liouville 型定理を示すことにより、時間大域存在および有限時刻爆発のための条件を導く。

4. 研究成果

(1) 優 Sobolev 臨界非線形項を持つ楕円型方程式における特異解の存在、一意性、漸近的性質について考察を行い、非線形項がべき乗に摂動が加わる場合、あるいは指数関数に摂動が加わる場合、それぞれの場合に、特異解の存在、一意性、漸近的性質を示すことができた。先行研究では、摂動についてのオーダーを指定する必要があったが、本研究では、Banach 空間における不動点定理を用いる代わりに Pohozaev 型恒等式および先験的評価を利用することによりオーダーの指定なしで解の存在と漸近的性質を同時に示すことができた。この応用として非線形楕円型偏微分方程式に対する分岐問題に対して特異解をもつ分岐パラメータは一意であること、解の最大値パラメータを無限大にすると特異解に収束することを明らかにすることができた。さらに全空間における特異解の一意存在性と有界領域における特異解の存在性に関する相互補完的な性質を明らかにした。

(2) 空間高次元における放物-楕円型走化性方程式系の初期値問題の解の挙動について考察を行った。とくに方程式系の定常解を用いることにより解が時間大域的に存在するための条件および有限時刻爆発するための条件を導いた。とくに定常解が 1 パラメータの属として表されること、この定常解が時間大域存在と有限時刻爆発の境目になっていることを示すことができた。さらに、この定常解が指数非線形項をもつ非線形楕円型方程式の解を用いて表現できることから、空間 10 次元以上においては、Biler, Karch 等による Morrey 空間におけるノルム評価を用いた解の時間大域存在のための十分条件が最適であることを示すことができた。一方、空間 3 次元以上 9 次元以下では、既存の評価が最適ではなく改善の余地があることを示すことができた。

(3) 一般の優 Sobolev 臨界の非線形項を持つ楕円型方程式における特異解の存在、一意性、漸近的性質について考察を行った。とくに非線形項の具体形を仮定せず、べき乗型や指数型を含む広範な非線形楕円型方程式を考えた。主要項がべき乗関数とは限らない非線形項や Trudinger-Moser 型不等式に現れる非線形項を始めとする優指数関数を扱うために、藤嶋-猪奥による条件を用いて考察を行った。この仮定の下、球対称な特異解は一意に存在すること、さらにその一意特異解は正則な解の無限極限として与えられることを示すとともに、特異解の原点近傍における漸近挙動を明らかにすることができた。さらに、優指数関数を非線形項を持つ問題に対しては、特異解の詳細な漸近挙動を導くことができた。これらの結果の応用として非線形楕円型偏微分方程式に対する分岐問題に対して特異解が存在する分岐パラメータが一意であること、解のパラメータを無限大にすると特異解に収束することを明らかにすることができた。

(4) 非線形放物型偏微分方程式の自己相似解の形状関数に因する楕円型偏微分方程式を考え、その特異解の存在と一意性および多重存在を優 Sobolev 臨界・Sobolev 臨界・劣 Sobolev 臨界の場合について考察を行った。優 Sobolev 臨界の場合には、特異解が高々一意であることを

示すことができた。一方, Sobolev 臨界の場合には Liouville 型の結果が得られ, 劣 Sobolev 臨界の場合には, 特異解が無限個存在すること, それらの特異解は, 同一の漸近的性質をもつことを示すことができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yuki Naito	4. 巻 90
2. 論文標題 Multiplicity of singular solutions to a class of semilinear elliptic equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 97-110
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hashizume Masato	4. 巻 30
2. 論文標題 Effect of lower order perturbation on maximization problem associated with Trudinger-Moser inequality	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 No. 26, 26 pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00030-022-00835-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hashizume Masato	4. 巻 23
2. 論文標題 Asymptotic properties of critical points for subcritical Trudinger-Moser functional	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advanced Nonlinear Studies	6. 最初と最後の頁 23 pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/ans-2022-0042	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hashizume Masato, Ioku Norisuke	4. 巻 151
2. 論文標題 $W^{1,p}$ approximation of the Moser-Trudinger inequality	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 4279 ~ 4289
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/16508	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyamoto Yasuhito, Naito Yuki	4. 巻 202
2. 論文標題 Singular solutions for semilinear elliptic equations with general supercritical growth	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 341 ~ 366
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-022-01244-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Naito Yuki	4. 巻 297
2. 論文標題 Blow-up criteria for the classical Keller-Segel model of chemotaxis in higher dimensions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 144 ~ 174
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2021.06.024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyamoto Yasuhito, Naito Yuki	4. 巻 27
2. 論文標題 Fundamental properties and asymptotic shapes of the singular and classical radial solutions for supercritical semilinear elliptic equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA	6. 最初と最後の頁 1-25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-020-00658-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hashizume Masato	4. 巻 279
2. 論文標題 Maximization problem on Trudinger-Moser inequality involving Lebesgue norm	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 108513 ~ 108513
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jfa.2020.108513	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chern Jann-Long, Hashizume Masato, Hwang Gyeongha	4. 巻 269
2. 論文標題 Properties of solutions to semilinear elliptic problem with Hardy potential	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 1432 ~ 1464
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2020.01.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Singular solutions for semilinear elliptic equations with general supercritical growth,
3. 学会等名 The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 A bifurcation diagram of solutions to semilinear elliptic equations with general supercritical growth
3. 学会等名 第214回愛媛解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 A bifurcation diagram of solutions to semilinear elliptic equations with general supercritical growth
3. 学会等名 2023 Korea-Japan Workshop on Nonlinear PDEs and Its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 A bifurcation diagram of solutions to semilinear elliptic equations with general supercritical growth
3. 学会等名 RIMS 研究集会「常微分方程式の定性的理論の発展とその応用」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宮本安人、内藤雄基
2. 発表標題 Singular solutions for semilinear elliptic equations with general super critical growth
3. 学会等名 日本数学会2022 年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 空間高次元における走化性方程式系の特異定常解について
3. 学会等名 第 2 回 香川における偏微分方程式研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Singular solutions for semilinear elliptic equations with general supercritical growth
3. 学会等名 Colloquium in Department of Mathematics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 Singular solutions for semilinear elliptic equations with general supercritical growth
3. 学会等名 第12回室蘭非線形解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuki Naito
2. 発表標題 Fundamental properties of the singular radial solutions for supercritical semilinear elliptic equations
3. 学会等名 Differential Equations Day on Zoom (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 Blow-up criteria for the parabolic-elliptic Keller-Segel system in higher dimensions
3. 学会等名 オンライン放物型偏微分方程式ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 Blow-up criteria for the parabolic-elliptic Keller-Segel system in higher dimensions
3. 学会等名 日本数学会 函数方程式論分科会 一般講演
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 内藤雄基
2. 発表標題 Singular solutions to semilinear elliptic equations with supercritical nonlinearity
3. 学会等名 香川における偏微分方程式研究会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 内藤 雄基
2. 発表標題 Blow-up criteria for the classical Keller-Segel model of chemotaxis in higher dimensions
3. 学会等名 九州関数方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 内藤雄基、宮本安人
2. 発表標題 Existence and uniqueness of singular solutions for supercritical semilinear elliptic equations
3. 学会等名 日本数学会 関数方程式分科会一般講演
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	橋詰 雅斗 (Hashizume Masato) (20836712)	大阪大学・大学院基礎工学研究科・助教 (14401)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 2024 Japan-Korea Workshop on Nonlinear PDEs and Its Applications	開催年 2023年 ~ 2023年
--	----------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------