

令和 6 年 5 月 22 日現在

機関番号：34412

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03686

研究課題名(和文) 楕円型偏微分方程式の解の対称性と非対称性

研究課題名(英文) Symmetry and asymmetry of solutions for the elliptic partial differential equations.

研究代表者

梶木屋 龍治 (Kajikiya, Ryuji)

大阪電気通信大学・共通教育機構・教授

研究者番号：10183261

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：Moore-Nehari 常微分方程式をディリクレ境界条件の下で区間 $(-1,1)$ において考察する。区間 $(-1,0)$ にちょうど $m$ 個の零点をもち、なおかつ、区間 $(0,1)$ にちょうど $n$ 個の零点を持つものを $(m,n)$ -solution と呼ぶ。任意の非負整数の組 $(m,n)$ に対して、 $(m,n)$ -solution が存在することを本研究において証明した。非負整数 $n$ に対して区間 $(-1,1)$ にちょうど $n$ 個の零点を持つ解を $n$ -nodal solution と呼ぶ。対称な $n$ -nodal solution から非対称な $n$ -nodal solution が分岐することを本研究において証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対称な解の存在および非対称な解の存在は、楕円型偏微分方程式の解空間の構造を理解する上で非常に重要なことである。零点を持つ対称解や非対称解の研究はあまり行われていない。本研究では、これらの解の詳細な情報を得ている。特に、与えられた非負整数の組 $(m,n)$ に対して、区間 $(-1,0)$ にちょうど $m$ 個の零点を持ち、区間 $(0,1)$ にちょうど $n$ 個の零点を持つ解の存在は、現在までに知られていなかったものであり、本研究は独創的な研究である。さらに、零点を持つ対称解から非対称解が分岐する研究は、本研究以外には行われていないと思われる。

研究成果の概要(英文)：We consider the Moore-Nehari ordinary differential equation under the Dirichlet boundary condition in the interval  $(-1,1)$ . We prove the existence of a solution which has exactly  $m$  zeros in the interval  $(-1,0)$  and exactly  $n$  zeros in  $(0,1)$  for given nonnegative integers  $m$  and  $n$ . For a non-negative integer  $n$ , we call a solution  $u(x)$   $n$ -nodal if it has exactly  $n$  zeros in  $(-1,1)$ . We call a solution symmetric if it is even or odd. For each  $n$ , the equation has a unique  $n$ -nodal symmetric solution, which is a continuous curve. We prove that the curve bifurcates and an asymmetric solution emanates.

研究分野：楕円型偏微分方程式

キーワード：対称解 非対称解 解の分岐 変分法

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

2 階常微分方程式の 2 点境界値問題において、係数関数が偶関数である場合、偶関数解と奇関数解の存在が期待できる。しかしながら、偶関数でも奇関数でもない解が存在することがある。以前から知られている結果として、偶関数でない正值解の存在がある。また、2 階楕円型偏微分方程式についても球対称でない正值解の存在が知られている。しかし、符号が変化する解、すなわち零点を持つ解の対称性および非対称性については、ほとんど知られていない。本研究では符号が変化する解の対称性および非対称性について考察する。

### 2. 研究の目的

ディリクレ境界条件の下で、2 階常微分方程式の零点を持つ解の対称性と非対称性を研究することを目的とする。偶関数解と奇関数解を対称解と総称する。零点の個数を指定したときの対称解の存在と一意性を証明する。また、零点を持つ対称解から非対称解が分岐して現れることを証明することを目的とする。

### 3. 研究の方法

本研究を推進するためには、様々な数学的資料が必要となる。まず、多くの専門書、論文、文献、数学雑誌、プレプリント等の参考資料を集める。次にこれら进行分析、整理して既知の結果を十分に把握し、理解して研究の基礎とする。また集めた資料は、パソコン内にデジタル化したデータとして保存し、これらを常時参照できるようにする。これらの準備の元に、問題を分析し考察を行う。パーソナルコンピュータによる数値シミュレーションの助けを借りて、解の対称性と解の零点の個数の関係を調べる。さらに他研究者との討論を行い、国内外の多くの研究集会に出席し、研究結果を発表する。またそこで、新しい情報を入手し研究の進展に役立てる。

### 4. 研究成果

1. Moore-Nehari 常微分方程式を区間  $(-1, 1)$  において、ディリクレ境界条件の下で考察する。Moore-Nehari 常微分方程式では、未知関数を  $u(x)$  とするとき、非線形項は  $h(x, u)$  と  $u(x)$  のべき乗を書いたものとなり、係数関数  $h(x, u)$  は次のような形をしている。

$|x| < 1$  のときに  $h(x, u) = 0$ 、 $|x| > 1$  のときに  $h(x, u) = 1$  となっている。このとき、非負整数の組  $m, n$  に対して、Moore-Nehari 微分方程式の解で、区間  $(-1, 0)$  にちょうど  $m$  個の零点をもち、なおかつ、区間  $(0, 1)$  にちょうど  $n$  個の零点を持つものを  $(m, n)$ -solution と呼ぶ。本研究において次のことを証明した。任意の非負整数の組  $(m, n)$  に対して、Moore-Nehari 微分方程式のパラメータ  $p$  が十分 1 に近いとき、 $(m, n)$ -solution が存在する。また、任意の非負整数  $n$  に対して、 $2n$  個の零点を持つ偶関数解と  $2n+1$  個の零点を持つ奇関数解の存在を証明した。任意の非負整数  $n$  に対して、区間  $(-1, 1)$  にちょうど  $n$  個の零点を持つ解を  $n$ -nodal solution と呼ぶ。 $n$  を固定したときに  $n$ -nodal solution の一意性を証明した。これは  $S(n, p)$  の連続な曲線となる。これを  $S(n, p)$  と表す。非線形項のべきを  $p$  とするとき、次のことを証明した。

$p > 1$  ならば、 $n$  が奇数のとき  $S(n, p)$  は分岐しない、 $n$  が偶数ならば分岐して、非対称な  $n$ -nodal solution が発生する。

$0 < p < 1$  ならば、 $n$  が偶数のとき  $S(n, p)$  は分岐しない、 $n$  が奇数のとき  $S(n, p)$  は分岐して、非対称な  $n$ -nodal solution が発生する。

2. 2 階楕円型偏微分方程式において非線形項  $f(u)$  が  $f(0) < 0$  を満たすときに、方程式は semipositone と呼ばれる。領域が球および円環領域であるときに semipositone の楕円型偏微分方程式をディリクレ境界条件の下で考察した。この問題の困難さは、非負解が必ずしも正值解にならないことである。これは、この問題に対して強最大値原理が適用しにくいために起きることである。従来知られているよりも非線形項に対する非常に弱い仮定の下で、球対称正值解が存在する事を証明した。その手法は、ラグランジェ汎関数の最小値を取る点を見つけてそれが正值球対称解になることを証明するものである。

3. symmetric mountain pass lemma は、楕円型偏微分方程式において、解が無限に多くあることを証明するために使われる。このとき、この補題はラグランジェ汎関数の臨界値の列で無限大に発散するものが存在する事を保証するものである。その結果この臨界値の列に対応する臨界点の列が無限に多く存在する事になる。そこで問題となるのは、この臨界点の列は無限大に発散するのかということである。結論としては、臨界点が無限大に発散することも有界になることもあることを証明した。次の結果である。

本研究において、非有界な臨界値の列を持つ 3 種類のラグランジェ汎関数の例を構成した。

1. 臨界点の集合は有界である.
2. 臨界点の集合は有界列と非有界列の両方を含んでいる.
3. 臨界点の集合は加算無限集合であり, 非有界である.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 74
2. 論文標題 Symmetric and asymmetric nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation.	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 655-680
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/86168616	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 29
2. 論文標題 Boundedness of critical points in the symmetric mountain pass lemma.	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Convex Anal.	6. 最初と最後の頁 443-458
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 512
2. 論文標題 Bifurcation of symmetric solutions for the sublinear Moore-Nehari differential equation.	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 1-35
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2022.126142	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 41
2. 論文標題 Existence of nodal solutions for the sublinear Moore-Nehari differential equation.	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A	6. 最初と最後の頁 1483-1506
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2020326	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Kajikiya and E. Ko	4. 巻 484
2. 論文標題 Existence of positive radial solutions for a semipositone elliptic equation.	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2019.123735	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 R. Kajikiya	4. 巻 30
2. 論文標題 Bifurcation of nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation.	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 1-29
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-022-00816-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Asymptotic behavior and monotonicity of radial eigenvalues for the p-Laplacian
3. 学会等名 2023 Korea-Japan Workshop on Nonlinear PDEs and Its Applications. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation.
3. 学会等名 The 13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications. (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Bifurcation of nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation.
3. 学会等名 The invited lecture at Pusan National University, (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 劣線形 Moore-Nehari 方程式の解の分岐.
3. 学会等名 日本数学会, 北海道大学
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Radial eigenvalues for the p-Laplacian, II. Monotonicity.
3. 学会等名 日本数学会, 東北大学
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Radial eigenvalues for the p-Laplacian, I. Asymptotic behavior.
3. 学会等名 日本数学会, 東北大学
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Boundedness of critical points in the symmetric mountain pass lemma.
3. 学会等名 日本数学会, 中央大学
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Bifurcation of nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation
3. 学会等名 南大阪応用数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Moore-Nehari 微分方程式の解の分岐
3. 学会等名 大阪公立大学における微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Moore-Nehari 方程式の対称解の分岐
3. 学会等名 早稲田大学, 応用解析研究会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Moore-Nehari 微分方程式の対称解の分岐
3. 学会等名 熊本大学応用解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 球対称pラプラスアンの固有値の漸近挙動と単調性
3. 学会等名 名古屋力学系セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 劣線形Moore-Nehari 方程式の解の分岐
3. 学会等名 研究会「精密解析による非線形問題の新展開」（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 R. Kajikiya
2. 発表標題 Symmetric and asymmetric nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation.
3. 学会等名 Differential Equations Day on ZOOM. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年



1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 Bifurcation of nodal solutions for the Moore-Nehari differential equation.
3. 学会等名 日本数学会, 千葉大学 (オンラインでの学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 劣線形 Moore-Nehari 方程式の nodal solution の存在
3. 学会等名 オンラインによる微分方程式セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 劣線形楕円型方程式の無限に多くの解の存在
3. 学会等名 東北大学談話会 (オンライン) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 劣線形楕円型方程式の無限に多くの小さな解の存在
3. 学会等名 広島大学談話会 (対面) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 Moore-Nehari 方程式の対称および非対称なnodal solution の存在
3. 学会等名 日本数学会, 熊本大学 (オンラインでの学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 劣線形 Moore-Nehari 方程式の nodal solution の存在
3. 学会等名 日本数学会, 慶應義塾大学 (オンラインでの学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 梶木屋 龍治
2. 発表標題 劣線形楕円型方程式の無限に多くの解の存在
3. 学会等名 埼玉大学談話会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	田中 敏  (Tanaka Satoshi)  (90331959)	東北大学・理学研究科・教授    (11301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
韓国	Faculty of Basic Sciences	Keimyung University	