様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 １５ 日現在

機関番号：２５４０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ０３７５４

研究課題名（和文）多価確率微分方程式に対する確率制御理論の構築と展開

研究課題名（英文）Construction and development of the stochastic control theory for multivalued stochastic differential equations

研究代表者
田中　輝雄（Tanaka, Teruo）

広島市立大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：８０２２７１４９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）：(1)コンパクト凸集合値確率過程に対して，コンパクト凸集合族をBanach空間に埋め込むベクトル化手法を用いて，Banach空間値マルコフ過程と同一視し，集合値マルコフ過程の考察を行った．
(2)分数型評価関数に対する確率制御問題（マルコフ決定過程，最適停止問題）に対して，最適制御（最適政策，最適停止規則）の存在性と最適値の特徴付けを与え，Dinkelbach アルゴリズムの有効性の考察を行った．
(3)多次元時間変数をもつ確率過程に対する最適停止問題の預言者について，差の評価と比の評価を考察し，普遍定数や普遍定数を導くための最適化問題の導出を行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義
確率制御理論では、制御過程、状態過程、評価関数の3要素が重要である。従来研究は、制御過程はスカラー値又はベクトル値確率過程、状態過程は制御過程を変数として含む確率微分方程式で記述されるスカラー値又はベクトル値確率過程評価関数、制御過程と状態過程に依存する汎関数の期待値によって定式化を与え、最適制御の存在を証明し、最適値関数の特徴付けを行うことであった。
本研究は、集合値確率過程の性質を考察すること、評価関数を分数型にすることよって定式化を与え、最適制御の存在を証明し最適値関数の特徴付けを行うこと、および最適停止問題に対する預言者の不等式を考察することである。

研究成果の概要（英文）：(1)For a compact convex set valued stochastic process, we have studied the theory of set valued Markov processes by using the method of embedding the a family of compact convex sets to some Banach space, and identifying a set valued Markov process and a vector valued Markov process.
(2)We have studied stochastic control problems (Markov decision processes, optimal stopping problems) under fractional criterion, proved the existence of an optimal control (optimal policy, optimal stopping rule), and given the characterization of optimal value. We also investigated the efficiency of Dinkelbach algorithm in order to seek an optimal control.
(3)We have studied the difference comparison and ratio comparison of prophet inequalities for multiparameter optimal stopping problem, and drive a universal constant and an optimization problem in order to seek the universal constant.

研究分野：計画数学

キーワード：集合値確率過程　確率制御問題　マルコフ決定過程　最適停止問題　分数型評価基準　預言者の不等式

１．研究開始当初の背景

集合値解析学と確率論・確率過程論との関連，つまり，集合を値にとる確率変数（集合値確率変数）による集合値確率論,集合値確率過程の研究としては,集合値確率変数に対する極限定理,集合値マルチンゲール理論，集合値確率微分方程式等の研究が行われている．一般に確率制御理論では，制御過程，状態過程，評価関数の３要素が重要である．従来研究は，

・制御過程：スカラー値又はベクトル値確率過程
・状態過程：制御過程を変数として含む確率微分方程式で記述されるスカラー値又はベクトル値確率過程
・評価関数：制御過程と状態過程に依存する汎関数（スカラー値確率変数）の期待値

によって定式化を与え，最適制御の存在を証明し，最適値関数の特徴付けを行うことであった．

本研究は，

・制御過程：集合値確率過程
・状態過程：制御過程を変数として含む確率微分包含方程式又は集合値確率微分方程式で記述される確率過程
・評価関数：制御過程と状態過程に依存する集合値関数（集合値確率変数）の期待値

によって定式化を与え，最適制御の存在を証明し，最適値関数の特徴付けを行うことである．

この問題を集合値確率制御理論と命名する．さらに，多価確率微分方程式（Mutivalued Stochastic Differential Equation）を，決定論的微分包含の概念を用いた多価微分包含方程式論に対応する方程式である確率微分包含方程式（Stochastic Functional Inclusion, SFI）と，確率微分方程式自身が集合値となる方程式である集合値確率微分方程式（Set-valued Stochastic Differential Equation, SSDE）に分類することとする．

本研究では，Banach 空間のコンパクト凸部分集合を値にとる集合値確率過程を扱い，また，集合値確率変数の期待値として Aumann 積分を採用する．

集合値確率制御理論に関する先行研究の有無の状況は以下の通りであり，新分野といえる．

(1) 離散時間時間変数をもつ集合値確率過程に対する集合値最適停止問題
G.Krupa(Probability and Mathematical Statistics vol.23 no.1 pp.77-91 2003)の研究があるのみである．

(2) 集合値バンディット問題，１次元連続時間時間変数をもつ集合値確率過程に対する集合値最適停止問題

	スカラー値評価関数	集合値評価関数
SFI 制御過程	無	無
SSDE 制御過程	無	無

(3) 集合値連続的制御問題

	スカラー値評価関数	集合値評価関数
SFI 制御過程	有（M. Kisielewicz 氏ほか）	無
SSDE 制御過程	無	無

また，先行研究では集合値確率過程のマルコフ性の研究はなされていない．マルコフ性は一般に確率過程論，確率微分方程式論の基礎を成すものであり，集合値確率過程に対するマルコフ性の定義を与え，性質を調べることは重要である．

２．研究の目的

状態制約をもつ確率制御問題，集合値観測をする故障許容制御問題，不規則集合移動体の最適探索問題，綿畑検査，鍼療法，画像処理等へ確率制御理論を応用するとき，状態過程と評価関数

を集合値に拡張する必要がある．つまり，集合値確率過程に対する確率制御理論を構築する必要があり，特に，前章 (2)，(3)の表に示したように，評価関数を集合値にした場合の確率制御理論に関する研究は新分野である．同表の「無」の場合について，各問題に対して集合値評価関数を定義し，最適制御（最適停止規則）の存在を証明し，最適値関数の特徴付けを与える．

さらに，状態制約をもつ確率制御問題，不規則集合移動体の最適探索問題等へ応用することを目的とする．

本研究では，確率制御理論で重要な 3 要素を集合値確率過程とすることが従来研究と異なる点であり，特に，評価関数を集合値関数とすることに特徴がある．このことにより，従来のスカラー値（実数値）あるいはベクトル値評価関数の確率制御理論を特殊な場合として包摂することが出来る．

集合値確率変数，集合値評価関数を扱う際の数学的課題は，これらの値の順序関係にある．集合の包含関係で集合間に半順序を定義することは自然な考え方であるが，応用上自然な解釈，意味付けで全順序を定義することに困難がある．

一般に確率制御理論において，Bellman 方程式，双対法，最大値原理等の解析手法があるが，この困難を解決することは，これらとは異なる手法を提案することにつながる．

確率微分包含方程式と 集合値確率微分方程式に対する弱解の概念を導入すること，および，確率過程論でよく知られているマルチンゲール問題を用いて集合値確率制御問題を解析することが有用であり，第 4 の解析手法を提案することにつながる．

３．研究の方法

(1) 本研究の主要な部分は単独研究で行った．
(2) 研究成果の公表と議論，意見交換のため学会出張，研究打合せを行った．

４．研究成果

(1) 制御過程を集合値確率過程，状態過程を制御過程に依存する確率微分包含方程式又は集合値確率微分方程式で記述される確率過程，評価関数を制御過程と状態過程に依存する集合値関数（集合値確率変数）の期待値によって定式化を与え，最適制御の存在を証明し，最適値関数の特徴付けを行うことである．そのために，コンパクト凸集合値確率過程に対して以下の基本事項について研究を行った．

コンパクト凸集合族を Banach 空間に埋め込むベクトル化の手法を用いると，コンパクト凸集合を値としてもつ集合値確率変数（多価確率変数）は，Banach 空間に値をとるベクトル値確率変数（一価確率変数）とみなすことができる．この事柄を用いて，集合値マルコフ過程の考察を行った．集合値状態に依存する集合値条件付期待値の定義，離散時間変数をもつ集合値確率過程のシフト作用素の定義，離散時間変数をもつ集合値マルコフ連鎖の定義等を与え，離散時間変数をもつ集合値マルコフ連鎖が強マルコフ性を有することを示した．

これらの研究に基づき，連続時間変数をもつ集合値マルコフ過程の定義，連続時間変数をもつ集合値マルコフ過程の強マルコフ性を定義，連続時間変数をもつ集合値マルコフ過程の標本路の準左連続性を与え，強マルコフ性を有するための十分条件を考察した．

(2) 確率汎関数型多価微分方程式によって状態方程式が記述され，ランニング利得と終端利得をもつ評価関数の分数型を評価関数にもつ確率制御問題の定式化を与えて，その最適値関数の性質の考察，最適制御の存在の証明を与えた．

本研究における確率制御問題の定式化は，通常の確率制御問題の定式化と同様に弱形式（弱解）の概念の下で定式化を与えている．最適値関数の性質の考察に関しては，状態領域は d 次元ユークリッド空間の有界領域と仮定し，ランニング利得と終端利得の一様有界性の仮定の下で，数理計画法における分数計画法のパラメトリック法を用いることにより，分数型評価関数を通常の評価基準に変換し，最適値関数のパラメータに関する凸性，狭義単調減少性，リプシッツ連続性を示し，分数型評価基準の確率制御問題に対する最適値関数の状態変数に関する連続性について考察を行った．

この際，拡散過程の有界領域からの退出時間の期待値についての考察が重要になる．最適制御の存在の考察に関しては，状態領域は d 次元ユークリッド空間の有界領域と仮定し，確率汎関数型多価微分方程式の集合値ドリフト項には閉値，凸性，有界性，連続性の条件を課し，集合値拡散項には閉値，凸性，有界性，連続性，coercive 条件，対角的凸性，ある種の閉包性を課し，また，ランニング利得関数には一様可積分有界性とカラテオドリー関数であるという条件を課し，終端利得関数には有界性と連続性の条件を課すことにより，最適制御の存在を示した．

(3) 確率制御問題において評価基準は重要な要素の 1 つである．評価基準として分数型評価基準を導入して，マルコフ決定過程，1 次元連続時間時間変数をもつ確率過程に対する最適停止問題，1 次元離散・連続時間時間変数をもつ確率過程に対する多変量最適停止問題，多次元離散時

間時間変数をもつ確率過程に対する最適停止問題を研究した．それぞれの問題に対する最適政策，最適停止規則を考察し，それらを求めるためのアルゴリズムとしてDinkelbachアルゴリズムの有効性を検討した．

これらの問題に対してパラメトリック法を用いて，分数型評価基準を通常の評価基準に変換し，パラメータに関する最適値関数の凸性，リプシッツ連続性，狭義単調性，パラメータを限りなく大きく（小さく）した時に発散することを示し，また，これらの結果を用いて最適値関数の値が0になるパラメータの値の存在を示した．さらに，この最適値関数の値が0になるパラメータの値が分数型評価基準の問題の最適値に一致すること，また，この最適値関数の値が0になる時の最適政策，最適停止規則が分数型評価基準の問題の最適政策，最適停止規則になることを証明した．特に，マルコフ決定過程の場合に，最適値関数の値が0になるパラメータの値が初期状態に関して連続になることを証明した．

分数型評価基準の問題の最適政策，最適停止規則を求めるためのアルゴリズムとしてDinkelbach アルゴリズムを考え，最適値に収束する列および最適政策，最適停止規則の生成法を提案しその収束性を証明した．

また，多次元離散時間時間変数をもつ確率過程に対する最適停止問題に対する預言者の不等式について考察した．確率過程の最大値の期待値と最適値の比の評価と差の評価について検討し，比の評価については最適な普遍定数を具体的に導き，差の評価については最適な普遍定数を導くための最適化問題を導出した．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Teruo Tanaka	4．巻 -
2．論文標題 A discrete time Markov decision process with a fractional discounted reward	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Journal of Information and Optimization Sciences（掲載予定）	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Teruo Tanaka	4．巻 -
2．論文標題 Continuous time optimal stopping problems with fractional rewards	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Journal of Information and Optimization Sciences（掲載予定）	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Teruo Tanaka	4．巻 -
2．論文標題 Discrete time multiparameter optimal stopping problems with fractional rewards	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Journal of Information and Optimization Sciences（掲載予定）	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Teruo Tanaka	4．巻 -
2．論文標題 Multivariate fractional optimal stopping problems	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Journal of Information and Optimization Sciences（掲載予定）	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 朝田智也，田中輝雄
2．発表標題 分数型ペイオフを持つ微分ゲームについて
3．学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会2022年春季研究発表会
4．発表年 2022年

1．発表者名 田中輝雄
2．発表標題 分数型評価基準のマルコフ決定過程
3．学会等名 日本数学会2022年度年会
4．発表年 2022年

1．発表者名 田中輝雄
2．発表標題 最適停止問題の預言者の不等式―比の評価ー
3．学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4．発表年 2022年

1．発表者名 田中輝雄
2．発表標題 最適停止問題の預言者の不等式―差の評価ー
3．学会等名 日本数学会2023年度年会
4．発表年 2023年

１．発表者名 田中輝雄
２．発表標題 ある分数型評価基準の最適停止問題について
３．学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関