様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　７ 年　 ５ 月 ２３ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2024
課題番号：２０Ｋ０３７７２

研究課題名（和文）時間最適量子制御の基礎理論と特異制御に関する研究

研究課題名（英文）Theory of time-optimal quantum control and optimality of singular protocols

研究代表者
古池　達彦（Koike, Tatsuhiko）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・講師

研究者番号：４０２８６６４６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：私たちの量子力学の法則がなりたつ世界に暮らしています。量子力学の効果をあらわに用いる量子計算や量子情報通信は、従来の情報処理に比べて高い能力をもっています。量子計算機内部の操作等を高速で行うことは、量子力学の効果を保ちながら情報処理を行うために非常に重要です。この研究は、任意の量子力学的な操作を最速で行う方法を見つけるための手法を確立したものです。非常に適用範囲が広い基礎理論を得ました。

研究成果の学術的意義や社会的意義
この研究で確立した「時間最適量子制御」の基礎理論により、量子計算機等の実際の計算スピードを最適化できます。また、今後開発される量子力学の効果を利用したデバイスすべてについても同様に、効率的な動かし方を計算することができます。また、量子力学そのものの基本的な性質、例えば状態変化のスピード限界等について調べることもできます。

研究成果の概要（英文）：We live in a world in which quantum laws hold. Quantum computers and quantum telecommunication, where we explicitly make use of quantum effects, have a power beyond traditional information processing. In order to perform information processing with quantum coherence, it is essential to carry out operations, for example, in a quantum computer. We have established a fundamental theory of time-optimal quantum control, where one can find the fastest way to realize any given quantum operation in any given system.

研究分野：物理学、とくに量子情報理論および一般相対性理論

キーワード：量子情報　量子制御　量子計算　時間最適量子操作　量子最速曲線　ポントリャーギン最大値原理

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９，Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

量子系を素速く精確に制御することは，基礎研究･応用研究の双方から重要性が増している．制御とは，系を望む状態に保つ，または変化させることを指す．

基礎研究の観点においては，量子系を自在に制御するために外場の印加や物理量の測定が系のダイナミクスにどのような影響を与えるかを理解する必要がある．特に可能な制御法の中で最適な制御法（最も素早い，あるいは最も精確な制御）を求める研究は，量子ダイナミクスの限界を明らかにするものであり，興味深い．

応用研究の観点においては，量子計算や量子通信などの量子情報処理が，高速な計算や安全な通信を可能にする新しい情報処理の枠組として期待されている．例えば量子計算はスピン 1/2 粒子の上向きと下向きの重ね合わせ状態を情報の担い手とし，量子的な時間発展によって計算を行う枠組である．現在では，量子計算機の実用化も視野に入ってきている．このような量子系を効率的に制御することは喫緊の課題である．

私は 2006 年頃から「時間最適量子制御」の研究を行っている[1-3]．私は以前から量子制御を物理系そのものの問題と考え，また量子計算への応用を念頭においていたが，当時は量子情報理論の文脈において「時間最適性」（物理時間を最小にする）の観点での研究は必ずしも多くなかった．特に量子計算においては，回路モデルに基づく「ゲート最適性」（基本量子ゲートの数をなるべく減らす）を論じる研究が多く存在した．ところが，近年量子計算機そのものの実装が飛躍的に進歩したことを１つの契機として，「時間最適」な量子制御は主要な研究分野あるいは手法となってきている．研究数も爆発的に増加している．一方で，量子情報分野に参入する研究者が個々のバックグラウンドに基づく手法で研究を行っているために，研究成果の比較が困難という状況も発生している．

２．研究の目的

本研究の目的は，量子物理系を最も素早く制御する「時間最適量子制御」の問題に対する基礎理論の構成である．これを，私が従来から進めてきた「量子最速曲線法（QB）」の拡張によって行う．実際の制御において発生する，ハミルトニアンに対する不等式拘束や，不連続な最適制御を扱える枠組を構築する．手法として「ポントリャーギンの最大値原理」を用いる．構築した理論を用いて時間最適量子制御の一般的構造について論じる．とくに，最適制御を同定するのが困難となる「特異制御」の問題を議論する．特異的な制御が最適となる条件を求め，どのような場合に特異的な制御が排除・制限できるかを論じる．新理論を量子計算機実機の効率的なゲート実装等の問題に適用する．

３．研究の方法

QB の拡張で方法で今回用いるのは，「ポントリャーギンの最大値原理」[4]である．これは制御理論で一般的な方法の１つで，最適問題の必要条件を与えるものである．これは，ラグランジュ未定乗数法のような「古典的変分原理」の拡張と見なせるもので，不等式拘束条件や不連続制御を扱うことができるのが強みである．不等式拘束を扱える方法は他にも，カルシュ=クーン=タッカー（KKT）条件などがあるが，「最大値原理」を採用する理由は以下である．

1．一般性が高い．例えば，KKT 条件は拘束条件が数種類のうちのどれかの性質をもっていないと，最適性の必要条件を与えない．一方，量子制御では，ハミルトニアンに対する拘束条件がどのようになるか，状況により大いに異なる．

2．研究の蓄積が豊富．我々が論じたい時間最適量子制御の一般的性質を調べるのに適した，一般論的な研究が多く存在する．例えば，時間に関する微分を系統的に調べるものなど．なお，「最大値原理」は時間最適量子制御の文脈で既に利用されてはいる．ただ，それらは個別の最適化問題をまずいわゆる制御理論のフォーマットに直してから制御変数について「最大値原理」を適用するアプローチで，時間最適量子制御全般を俯瞰的に見渡せるようなものではなかった．本研究では，QB の一般性を保ちつつ「最大値原理」を用いた時間最適量子制御の理論を構築する．

４．研究成果

(1)時間最適量子制御に対する基礎理論を構築・確立した．与えられた制限下で所望の量子操作を最速に行う方法を求める理論である．これを，量子最速曲線法を「ポントリャーギン最大値原理」の手法で拡張することで実現した．その結果，従来扱えなかった不等式拘束条件を扱えるようになり，理論および応用上遭遇するほぼ全ての状況に適用可能となった．さらに，不連続制御等も自然に扱える．
(2)新理論の応用として特異制御の最適性を一般的に論じた．特異制御は最適制御を求める際に理論的な障害になる制御の一群である．これは，最適性条件「最大値原理」を特異制御が自明に満たしてしまうことにより起こる．我々は二次変分を考察することにより，最適特異制御がみたすべき精密な一般的条件を導出した．この新条件により，特異制御のうち真に最適かどうかを判定することが可能になった．また，量子系の持っている制御可能な自由度との関連も明らかにした．これらの成果により，最適量子制御の理論の発展，および量子計算機をはじめとする量子情報処理の広範囲の応用が期待される．
(3)量子計算機実機への具体的応用視野に，実際の量子計算機のモデルに対して基本的な量子ゲートを実現する量子最速曲線をシミュレートした．
(4)確立した量子最速曲線理論の普及にも資するべく，理論を招待公演にて紹介し，国外専門誌において来年度出版予定の招待論文を執筆した．
(5)量子力学等の正準形式の理論で現れる数学的な構造である接触構造を一般相対性理論に応用した．その結果として，宇宙弦の運動を解明した．また，同手法を発展させることでアインシュタイン方程式の新しい解を生成した．さらに今後，宇宙論において，一様宇宙モデルから非一様解を生成する一般的な手法が得られることが期待できる．

[1] A. Carlini A. Hosoya, T. Koike and Y. Okudaira, Phys. Rev. Lett. 96, 060503(4pp) (2006).
[2] A. Carlini A. Hosoya, T. Koike and Y. Okudaira, “Time-optimal unitary operation”, Phys.Rev. A75, 042308(8pp) (2007).
[3] A. Carlini A. Hosoya, T. Koike and Y. Okudaira, “Quantum brachistochrone for mixed states”, J. Phys. A: Math. Theor. 41, 045303(13pp) (2008).
[4] L.S. Pontryagin, V.G. Boltayanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko, “The mathematical theory of optimal processes, ” Wiley (1962).

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Wakamura Hiroaki、Koike Tatsuhiko	４．巻 22
２．論文標題 A general formulation of time-optimal quantum control and optimality of singular protocols	５．発行年 2020年
３．雑誌名 New Journal of Physics	６．最初と最後の頁 073010～073010
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1367-2630/ab8ab3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Koike Tatsuhiko	４．巻 380
２．論文標題 Quantum brachistochrone	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences	６．最初と最後の頁 1-21
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1098/rsta.2021.0273	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kozaki Hiroshi、Koike Tatsuhiko、Morisawa Yoshiyuki、Ishihara Hideki	４．巻 108
２．論文標題 Nambu-Goto strings with a null symmetry and contact structure	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Physical Review D	６．最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/PhysRevD.108.084069	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kozaki Hiroshi、Ishihara Hideki、Koike Tatsuhiko、Morisawa Yoshiyuki	４．巻 110
２．論文標題 Spacetime constructed from a contact manifold with a degenerate metric	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Physical Review D	６．最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1103/PhysRevD.110.104023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　2件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 古池達彦
２．発表標題 量子最速曲線と Pontryagin 最大値原理
３．学会等名 重力と量子で紡ぐ宇宙（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 量子最速降下線を用いた量子ゲートの時間最適化
２．発表標題 小野薫,佐藤皓志,古池達彦
３．学会等名 日本物理学会2024年春季大会
４．発表年 2024年

１．発表者名 佐藤皓志，古池達彦
２．発表標題 量子最速降下線の量子計算機への応用
３．学会等名 日本物理学会2023年春季大会
４．発表年 2023年

１．発表者名 古池達彦
２．発表標題 等質余次元１物体から量子最速曲線まで
３．学会等名 相対論と重力研究の現在，過去・未来（招待講演）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関