

令和 6 年 5 月 27 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K11696

研究課題名（和文）凸最適化を用いた最適化モデリングの深化

研究課題名（英文）Optimization modeling via convex optimization

研究代表者

脇 隼人（Waki, Hayato）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授

研究者番号：00567597

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：半正定値錐とアフィン部分空間の交わりに対して定義される特異度を用いた特徴づけの一つに、交互射影法の収束率の上界がある。本研究では、この上界値のより厳密な評価を行なった。いくつかの設定のもとで収束率を評価し、(i) 厳密な収束率が評価できることがある、(ii) 特異度で記述される収束率の上界よりも交互射影法の収束率が速くなるような例が複数あること、などが明らかにできた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

連続最適化のアルゴリズムの収束率は一般的に、上界とそれを達成するインスタンスを構成することで評価される。本研究では、特定の設定ではあるものの収束率の下界値も与えている。したがって、他のアルゴリズムに対しても同様の議論をすることが可能であり、その意味でも学術的意義がある。また、交互射影法のより厳密な収束率の評価や関連するインスタンスを提示したので、今後の学術的発展も期待できる。

研究成果の概要（英文）：One characterization using singularities defined for the intersection of semi-positive definite cones and affine subspaces is the upper bound on the convergence rate of the alternating projection method. In the present study, we obtained more rigorous evaluation of this upper bound. The convergence rate is evaluated in several settings, and it is found that (i) in some cases the exact convergence rate can be evaluated, and (ii) there are several cases where the convergence rate of the alternating projection method is faster than the upper bound of the convergence rate described by the singularity.

研究分野：最適化，数理計画

キーワード：交互射影法 収束率 singularity degree 凸解析

様式 C-19、F-19-1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

「与えられた制約のもとで最大化/最小化したい」という願望, いわゆる「最適化」は, 社会生活や経済活動だけでなく自然現象など多数で見られる. 学問の世界でも同様に, 様々な理学・工学の分野(例えば組合せ最適化を含む理論計算機科学, 制御理論, 統計, 機械学習, 量子計算など)で所望の選択等を実現するために最適化問題が用いられる. 特に, 凸最適化問題が重宝される. それは, たいていの凸最適化問題が「関数値が下がる方向に進めば大域的な最小解に到達できる」という性質を持っているため, 最小化アルゴリズムが設計できるからである.

また, 多くの重要な最適化問題は, NP 困難と言われる性質を持つため, 様々な最適化技術が開発されている. さらに近年の計算機の性能向上に伴い, このような NP 困難な最適化問題でも, 現実的な時間で最適解やそれに準じる解が得られるようになってきた. ここで重要な最適化技術の1つが, 凸最適化問題の利用である. NP 困難な最適化問題を様々な凸最適化問題で近似して, その最小値, 最小解あるいは実行不可能性の情報から, NP 困難な最適化問題の最適値を求めている. このように, 凸最適化問題は最適化モデリングだけでなく, 最適化技術の1つとして重要な役割を担っている.

2. 研究の目的

凸最適化問題として代表的なものとして, 半正定値計画問題(SemiDefinite Programming problem (SDP))が挙げられる. これは, アフィン部分空間と半正定値錐の交わりにおいて, 線形関数を最小化する最適化問題である. SDP に対するアルゴリズムとして主双対内点法と呼ばれるアルゴリズムが知られており, また, ソフトウェアとしてさまざまなものが公開されている. 主双対内点法は, アフィン部分空間と半正定値錐の交わりが内部を含む場合に, 収束性が議論されており, 実際にソフトウェアが高速に最適解(の近似解)を生成することが知られている. 一方で, 交わりが内部を含まない, つまり接している場合には, 数値的にも求解が難しいことが知られている.

このような幾何的な情報は singularity degree(特異度)と呼ばれる指標で評価できる. 内部を含む場合は, 特異度は 0 であり, 接している場合でも(ややラフな言い方ではあるが)より複雑な接し方をしている場合は, 特異度が高くなる. 事前にこの特異度がわかれば, それに合わせて SDP を変形し直すことで, 特異度の低い, あるいは 0 の SDP を再構成することができる.

しかし, この特異度は, 面的縮小法と呼ばれる有限回の反復で終了するアルゴリズムの最小反復回数として定義される. このアルゴリズムは概念的なものであり, 実際に与えられた SDP に対して適用して特異度を知ることは実際には難しい.

したがって, アフィン部分空間と半正定値錐の交わりに対する特異度の定義としてより計算しやすいものを与えることは, SDP の数値計算の観点から意味があることである. 本研究の本当の目的はこれである. しかしながら, 特異度の別の定義を与えることは難しい.

3. 研究の方法

そこで, 特異度を用いた特徴づけとして知られる, アフィン部分空間と半正定値錐の交わりに対する交互射影法の収束率に着目する. 交互射影法とは, 凸最適化問題を扱うアルゴリズムの一つであり, 複数の凸集合で構成される交わりの要素を, 各凸集合に対して射影を交互に適用して, 交わりの一つに収束する点列を生成するアルゴリズムである. 既存の成果として, 交互射影法は, (i) 特異度が 0 の場合は, 線形収束する, (ii) 特異度が d の場合, 交互射影法は劣収束し, その上界の指数は $-1/(2^{d+1}-2)$ である, ということが知られている. 本研究では, この事実をより厳密化することを目指した. それにより, 特異度の特徴づけとして, 交互射影法というのが関係するのかどうかをはっきりさせることが可能になる.

そのために, まずより単純な場合に対する交互射影法を議論した. また, アフィン部分空間と半正定値錐の交わりについての議論では, 固有値の計算や解析が複雑になることがわかったので, より単純で半正定値錐と類似する性質を持つ二次錐の場合を議論した. これは, アフィン部分空間と二次錐の交わりが接する場合と, アフィン部分空間と二次錐の直積が接する場合の二つの場合を議論することで, 半正定値錐の場合では詳しく解析できなかったことが明確になることがわかった.

4. 研究成果

出版された論文は 1 つであり, 残りの 3 つは, arxiv には公開されているが, この報告書作成時は査読中である. 以下で, それぞれの論文で何が明らかにできたが記載する.

1. H. Ochiai, Y. Sekiguchi and H. Waki, Exact convergence rates of alternating projections for nontransversal intersections, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2023

この論文では, 凸多項式の不等式で構成される凸集合と, 直線などの線形部分空間が原点で接する場合の, 交互射影法の収束率を議論している. 一般に, アルゴリズムの収束率は, 上界を導出して, その上界を達成する例を構成することで, そのアルゴリズムの収束率は高々線形収束である, あるいはこういうオーダーの列収束になる, などの議論がなされる.

言い換えれば、その上界値よりも良い収束率を実現する例が存在する可能性は残る。つまり、収束率の下界値は議論されないのが一般的である。これは下界値の導出がとても難しいからである。しかし、上記の設定では、下界値も導出でき、いわゆる厳密な収束率というものが導出できる。もちろん、設定が単純であるために下界値も導出できたわけだが、この結果は、他のアルゴリズムでも同様の議論が可能であることを示唆している。

もう一つ興味深いのは、より複雑な設定にすることで、初期点の選び方で、収束率が大きく異なることがある、ということである。この論文では、ある初期点では交互射影法で生成される点列が線形収束するが、別の初期点からは劣収束するような例を構成している。一般に、(連続)最適化アルゴリズムは初期点による収束率の影響は、オーダの係数としては現れるが、本質的に収束率が異なる、ということにはなかったので、大変興味深い例であった。

他にも、Lojasiewicz exponent による収束率の特徴づけなどを行なった。

2. H. Ochiai, Y. Sekiguchi and H. Waki, Expansions of the Characteristic Polynomial of a Perturbed Positive Semidefinite Matrix and Convergence Analysis of Alternating Projections, arXiv:2401.16689

この論文では、アフィン部分空間として対称行列で構成される直線と半正定値錐の交わりに対する交互射影法の収束率を評価した。この場合、収束率としては、線形収束、 k^{-1} 、 $k^{-1/2}$ しか現れないことを明らかにしている。なおここで、 k は交互射影法の反復回数である。議論では、compound matrix や netwon 図形、固有値の摂動といった数学的技術を用いている。

3. H. Ochiai, Y. Sekiguchi and H. Waki, Analytic Formulas for Alternating Projection Sequences for the Positive Semidefinite Cone and an Application to Convergence Analysis, arXiv:2401.15276

この論文では、直線とは限らないアフィン部分空間と半正定値錐の交わりに対する交互射影法の収束率を評価している。まず、交互射影法の反復が負の固有値やその微分で構成できることを明らかにしている。これに基づいて、 3×3 の対称行列空間を対象にし、交互射影法の収束率が、特異度で構成される上界値と一致する例があることを議論している。また、この上界値よりも速い、つまり線形収束する例についても紹介している。したがって、この論文の成果(の一つ)は、特異度で構成される収束率の上界値は、それを実現する例もあるし、それよりも(とても)速い収束率となる例もあることを明らかにしたことである。

4. H. Ochiai, Y. Sekiguchi and H. Waki, Convergence rate of alternating projection method for the intersection of an affine subspace and the second-order cone, arXiv:2401.02084

3 の論文では、特定の初期点において、収束率が特異度で構成される上界値と一致することを明らかにしているが、他の初期点に関しては、解析が困難であった。これは、半正定値錐への射影の際にランク 1 に射影される場合と、ランク 2 に射影される場合があり、前者であれば解析できたが、後者であれば解析が複雑になったためである。

そこで、射影時のランクが常に 1 以下になるような半正定値錐に類似する錐として、二次錐を扱ったのがこの論文である。結果としては、アフィン部分空間と二次錐の交わりが原点で接している場合は、線形収束し、それ以外は $k^{-1/2}$ であることが明らかになった。特に、二次錐との交わりが原点からの半直線になるような接し方の場合は、収束先がどこになるか明らかにならないにも関わらず、 $k^{-1/2}$ という収束率であることが明らかになった。

一方で、アフィン部分空間と 2 つの二次錐の直積の場合は、特異度は 2 以上になりうる。このような場合は、半正定値錐の場合と同じように、射影の解析が難しくなる。そこで、二つの例を構成した。一つは、収束率が特異度で構成される上界値と一致する例であり、もう一つは一致しない例である。前者は、半正定値錐の議論と同様に、最遅曲線(と我々が呼んでいる)に沿うような点列が構成できることを明らかにした。後者の例は、どのような初期点を取っても、上界値よりも速く収束することを明らかにした。既存の上界値は **error bound** と呼ばれる凸最適化理論でポピュラーな数学的手法・道具を用いており、このギャップがなぜ生じたのか明らかにすることが今後の課題の一つであると考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Ochiai Hiroyuki, Sekiguchi Yoshiyuki, Waki Hayato	4. 巻 41
2. 論文標題 Exact convergence rates of alternating projections for nontransversal intersections	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 57-83
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-023-00584-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Waki Hayato, Sebe Noboru	4. 巻 32
2. 論文標題 Characterization of the dual problem of linear matrix inequality for H-infinity output feedback control problem via facial reduction	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics of Control, Signals, and Systems	6. 最初と最後の頁 361 ~ 384
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00498-020-00261-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Sekiguchi Yoshiyuki, Waki Hayato	4. 巻 188
2. 論文標題 Perturbation Analysis of Singular Semidefinite Programs and Its Applications to Control Problems	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Optimization Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 52 ~ 72
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10957-020-01780-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Waki Hayato, Ebihara Yoshio, Sebe Noboru	4. 巻 610
2. 論文標題 Reduction of SISO H-infinity output feedback control problem	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 321 ~ 378
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.laa.2020.09.034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------