様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月　７ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ１１８４９
研究課題名（和文）波動方程式に対するspace-time境界要素法の研究

研究課題名（英文）A study on a space-time boundary element method for the wave equation

研究代表者
新納　和樹（Niino, Kazuki）

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：１０７２８１８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：時間域の偏微分方程式に対する数値解法では、従来、時間と空間を別々に離散化し、時間方向に逐次的に解を求める方法が広く研究されてきた。一方、space-time法は時間軸を空間に対する追加の一軸と見なし、まとめて離散化する方法で、柔軟なメッシュ分割が可能になる、並列化効率が向上する、領域が時間に応じて変形する問題を容易に扱えるようになるなどの利点がある。本研究では、space-time法と境界要素法を組み合わせた数値解法を応用上現れる複雑な問題に適用するための基礎的研究として、安定性解析や、2次元・3次元波動方程式に対する時空間メッシュの作成方法について研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
space-time法の研究は有限要素法との組み合わせの研究が多く、本研究で提案した、波動散乱問題の解析に有効な境界要素法とspace-time法とを組み合わせた数値解法は、時間域の波動散乱問題に対する有力な数値解法と成り得ると考えられる。また我々の知る限り、本研究の他にSpace-time境界要素法の安定性解析に関する研究や、3次元の問題に対するspace-time境界要素法の研究はほとんど行われていないため、今後様々な応用上現れる大規模な問題に適用可能なspace-time境界要素法の開発に向けた基礎的研究として、本研究の意義は大きいものと考える。

研究成果の概要（英文）：For numerical analysis of time-domain partial differential equations (PDEs), marching-on-in-time numerical methods, which independently discretises time and spacial axes, have been widely studied. The space-time method, which is another discretisation method for time-domain PDEs, discretises a space-time domain by regarding the time axis as an additional axis of the space. This method has advantages such as more flexible mesh decomposition, better efficiency of parallel computations, easy application to problems with deformation depending on time, etc. In this study we have worked on stability analyses and flexible mesh decomposition on a space-time domain for 2D and 3D wave equations, as a fundamental study of the space-time method to be used for analysing complex problems in applications.

研究分野：計算力学

キーワード：space-time法　境界要素法　波動方程式

１．研究開始当初の背景

線形偏微分方程式に対する代表的な数値解法として、差分法や有限要素法と並び、境界要素法が知られている。境界要素法は偏微分方程式を領域境界上で定義される境界積分方程式に変換し、これを解くことで問題の解を求める数値解法であり、放射条件を解析的に扱えることや遠方場の計算が容易であるという利点を有する。そのため無限領域を含む波動問題に特に有効な数値解法として知られており、音場の解析や、アンテナ・レーダーなどの電磁界解析の分野において現在でも盛んに研究されている。特に波動方程式や時間域の Maxwell 方程式に時刻に関する Fourier 変換を施すことで得られる、Helmholtz 方程式や周波数域の Maxwell 方程式といった周波数域における偏微分方程式に対して、境界要素法を適用する数値解法が幅広く用いられている。一方で波動方程式や時間域の Maxwell 方程式を直接境界要素法で扱う時間域境界要素法は、パルス波などの不連続な入射波を伴う問題を効率的に扱えるという利点があり、古くから研究されているものの、工学の様々な分野での数値解析に広く用いられているとは言えないのが現状である。時間域境界要素法があまり使われていない原因として、この数値解法では時間方向に逐次的に解を求めるため、並列化効率が悪く、特に大規模問題において多くの計算時間を要することが挙げられる。

一方で近年、時間域偏微分方程式に対する新しい数値解法として space-time 法が盛んに研究されている[1]。時間域境界要素法を含む従来の時間域における数値解法では、時間方向と空間方向を別々に離散化し、時間方向に逐次的に解を求めていたが、space-time 法では時間軸を空間に対する追加の軸と見なし、時空間領域をまとめて離散化する。これによってメッシュの細かさを時空間においてより柔軟にコントロールできる利点がある（図 1）。また従来法では時間方向に逐次的に解を求めていたが、space-time 法では問題を一つの大きな線形方程式に帰着し、一度にすべての時間にわたる解を求められるため、並列化がより効率よく行える[2]。また領域が時間に依存して変形するような問題は、従来法では領域形状の変更に応じてメッシュの更新が必要であったが、space-time 法では時空間において変形領域を固定された領域と見なすことができるため、変形問題を容易に扱うことができるという利点がある（図 2）。一方で、space-time 法によって得られる線形方程式は巨大であるため、素朴に space-time 法と境界要素法を組み合わせるだけでは多量の計算コスト（計算時間とメモリ）を要するという問題がある。

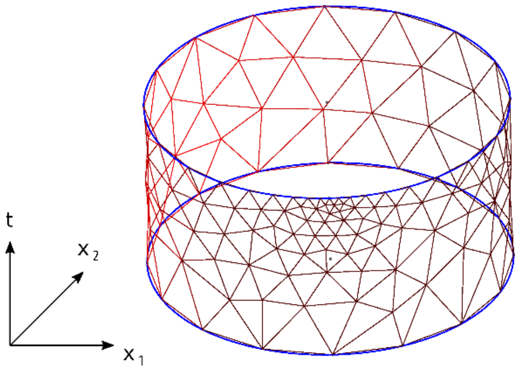

図 1：space-time 境界要素法における 2 次元円形領域に対するメッシュの例。Space-time 法では 2 次元領域に対して時間軸を追加の軸と見なすため、2 次元円形領域は 3 次元の円柱と見なすことができる。円柱の側面に任意のメッシュを用いることができるため、例えば図の様に円柱境界の一部、かつ時間の終端付近のみに細かいメッシュを使うなど、メッシュの自由度が高いという利点がある。

[1] Olaf Steinbach, “Space-time finite element methods for parabolic problems”, Computational methods in Applied Mathematics, Vol. 15, No. 4, pp. 551-566, 2015.
[2] Martin J Gander and Marin Neumuller, “Analysis of a new space0time parallel multigrid algorithm for parabolic problems”, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 38, No. 4, pp. A2173-A2208, 2016.

２．研究の目的

上記の研究背景を踏まえて、本研究課題の申請時に設定した研究目的は、工学の諸分野で現れるような大規模問題において有効な時間域の数値解法をとして、上記の space-time 境界要素法を実現することとした。この目的を達成するために解決すべき課題として、以下の二つを想定した。一つ目の課題は、領域変形を伴う問題の space-time 法による定式化である。Space-time 法は考える領域を時空間において離散化するため、時間に応じて領域形状が変形するような問題も、時空間における固定領域に対する問題と見なすことができる。また時間域の数値解法では安定性が重要な課題であり、実際に従来の時間域境界要素法では、素朴に得られる積分方程式をそのまま解くと不安定になることが知られているが、この積分方程式を時間微分することで安定

化できることが知られている[1]。Space-time 境界要素法では、離散化の際に時空間を考慮した定式化を行う一方で、扱う積分方程式自体は従来法のものと同じであるため、本研究課題申請時は、上記の従来法に対する安定化手法がそのまま space-time 法にも適用可能であると想定していた。

また二つ目の課題は計算の高速化である。上述のとおり space-time 境界要素法では全ての時間にわたる問題を一つの大きな線形方程式に帰着するため、その係数行列のサイズは膨大になる。この課題に対する解決策として、並列化計算を行うことに加え、Calderon の前処理を適用することを想定していた。Calderon の前処理は、線形方程式の反復解法における前処理手法の一種で、特に積分方程式に特化した前処理であり、積分方程式中に現れる積分作用素の性質を利用することで著しく反復回数が削減できる前処理手法として知られている。Calderon の前処理は周波数域の境界要素法で広く用いられる方法であるが、時間域においても適用可能であることから、Calderon の前処理による高速化の検討を予定していた。

[1] Tuong Ha-Duong, “On retardted potential boundary integral equations and thir discretization”, In Mark Ainsworth et. Al. (Eds.), Topics in Computational Wave Propagation, Berlin, Germany Springer-Verlag, 2003.

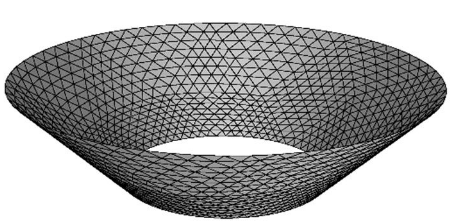

図 2：拡大する 2 次元の円形領域を space-time 境界要素法により離散化したメッシュの例。鉛直方向が時間軸に対応する。従来的な時間域境界要素法では領域の拡大に応じて領域境界のメッシュを生成する必要があったが、space-time 境界要素法では拡大する円形領域を 3 次元中の固定された領域と見なし。その境界を離散化すればよいため扱いが容易である。

３．研究の方法

研究開始当初は、最も簡単な一次元波動方程式に対する space-time 境界要素法の定式化と実装から着手した。領域形状が一定のシンプルな問題では、space-time 境界要素法の定式化・実装ともに想定通りに進めることができたが、領域形状が時間に依存して変化する場合、解法の安定性に問題があることがわかった。従来の時間域境界要素法では、境界積分方程式を時間方向に微分することで安定化できることが知られているが、領域形状が時間に依存する場合、境界上で時間微分が定義できないために、従来の安定化法を space-time 法にそのまま適用できないことがわかった。同様の微分として境界に沿った時間方向の接線微分を定義することができ、これによって得られた積分方程式による数値解がいくつかの問題で安定になることを確かめたが、この積分方程式が安定であるという証明は与えられなかった。そこで安定性解析の別のアプローチとして、安定性の問題が周波数域の固有値問題に帰着されることを利用し、数値的な固有値解析を行うことで space-time 境界要素法の安定性を判定する手法を提案した。この方法は我々のグループが以前に提案した安定性解析法である[1]が、本研究では新たに領域形状が時間に依存する問題に、この手法を適用する方法を定式化した。また実際にいくつかの問題に本手法を提案し、上述の接線微分によって安定化できることを確かめた。

一次元波動方程式に対する space-time 境界要素法の定式化と安定性解析を行った後、より高次元の波動方程式に対する space-time 境界要素法の研究を行った。特に 3 次元波動方程式への space-time 境界要素法の適用においてはメッシュの作成が問題となることがわかった。Space-time 境界要素法では、時間軸を加えた空間において領域の境界で成り立つ積分方程式を解くために境界のメッシュ分割が必要となるが、3 次元波動方程式においては、4 次元空間内の領域の 3 次元境界のメッシュ分割を行う必要がある。多くのメッシュ作成のための既成のソフトウェアは 3 次元までの領域を想定しているため用いることができず、また同一形状の角柱で分割するといった素朴なメッシュでは、space-time 法が持つ柔軟なメッシュ分割が可能であるという利

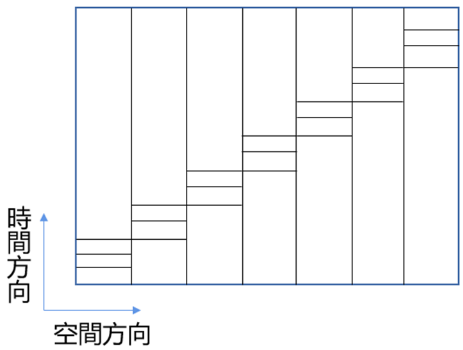

図 3：4 次元空間におけるメッシュ分割のイメージ図。時間方向と空間方向を別々に離散化することで、空間方向のメッシュ作成に既存のソフトウェアを使った柔軟なメッシュ分割が可能となる一方で、時間方向の刻み幅が可変であるため、図の様に特定の時刻・場所のみ細かく分割することができる。

点が失われてしまう。そこで我々は時間方向と空間方向を分けて離散化する一方で、時間の分割幅を可変にする方法を提案した（図３）。この方法では空間方向の離散化は 3 次元領域の境界に関するメッシュを作成すればよいので既存のソフトウェアを用いることができる。一方で、時間方向の分割幅を時刻・位置によって任意に設定できるため、問題に応じた柔軟なメッシュ分割は依然として可能である。特に、時間域の問題ではパルス波の反射といった波形や波形の不連続点が局在し、その局在箇所が事前にある程度予測できることがあるため、このような問題では局在箇所のみの時間分割を細かくすることで、問題の自由度を不必要に増やすことなく精度良く解析を行うことができる。この方法に基づく 3 次元波動方程式に対する space-time 境界要素法を実装し、いくつかの問題に対する数値実験を行った。提案法でメッシュの細かさをうまく設定することで、同一形状でメッシュ分割を行う素朴な space-time 法と比較して、同程度の精度をより少ない計算資源で実現したり、同程度の計算資源で高精度な計算を行ったりできることがわかった（図 4）。

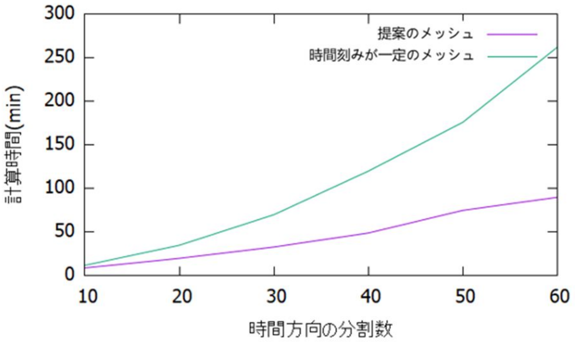

図 4：3 次元波動方程式に対する space-time 境界要素法において、提案したメッシュ分割と素朴なメッシュ分割を用いた場合の計算時間の比較。分割数が同程度になるメッシュを用いて計算を行うと、最大で従来法の 40%程度まで計算時間を削減できた。

[1] Mio Fukuhara, Ryota Misawa, Kazuki Niino, Naoshi Nishimura, "Stability of boundary element methods for the two dimensional wave equations in time domain revisited", Engineering analysis with boundary elements, Vol. 108, pp. 321-338, 2019.

４．研究成果

上述の通り、本研究の主な研究成果は領域変形を含む問題に対する固有値解析を用いた数値的な安定性解析手法の開発と、3 次元波動方程式に対する space-time 境界要素法の開発である。前節では触れなかったが、上記の主な研究成果から派生的に得られた成果として、2 次元波動方程式におけるクラック問題に対する space-time 境界要素法の開発や、space-time 有限要素法の安定性に関する研究なども挙げられる。Space-time 法の研究は、現在も有限要素法を中心に研究が行われており、space-time 境界要素法の研究は国内では他に見られず、国外でも理論的な研究が中心であるため、数値的な定式化や実装に重点を置いた上記の成果は先駆的であると言える。境界要素法は波動散乱問題に特に有効な数値解法であるため、本研究で提案した space-time 境界要素法は、時間域の波動散乱問題に対する有力な数値解法と成り得ると考えられる。また、Space-time 境界要素法の安定性解析に関する研究や、3 次元の問題に対する space-time 境界要素法の研究は我々の知る限りほとんど行われておらず、我々の研究結果のインパクトは大きいと考えられる。当初予定していた、Calderon の前処理に基づく space-time 境界要素法の高速化に関する研究は行えなかったため、申請時の目的である、工学の諸分野に現れる時間域の大規模問題に適用できる数値解法の開発までは至れなかったものの、この目的に向けた基礎的研究として意義の大きい成果が残せたと考える。実際、本研究で提案した space-time 境界要素法は、安定に解が得られる時間域の数値解法であり、メッシュ生成の工夫により計算時間の短縮に成功しているが、Calderon の前処理や並列化、動的なメッシュ生成法である adaptive refinement との組み合わせによるさらなる高速化の余地が残されている。今後これらの研究が進むことで、大規模問題に適用可能な数値解法が開発されることが期待される。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　3件）

１．著者名 池上明日香、新納和樹	４．巻 22
２．論文標題 3次元Helmholtz方程式に対するCBFMを適用した境界要素法について	５．発行年 2022年
３．雑誌名 計算数理工学論文集	６．最初と最後の頁 179-188
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 田原寛太、新納和樹	４．巻 21
２．論文標題 トーラスと同相な完全導体による電磁波動散乱問題に対する選点法を用いたisogeometric境界要素法におけるCalderonの前処理について	５．発行年 2021年
３．雑誌名 計算数理工学論文集	６．最初と最後の頁 111-116
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 新納和樹，西村直志	４．巻 20
２．論文標題 Maxwell方程式におけるPMCHWT定式化とMullerの定式化に対するIsogeometric境界要素法と選点法による離散化について	５．発行年 2020年
３．雑誌名 計算数理工学論文集	６．最初と最後の頁 7-12
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計15件（うち招待講演　2件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 Kazuki Niino
２．発表標題 Calderon preconditioning for the EFIE using collocation and the isogeometric BEM
３．学会等名 URSI GASS（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名
田中泰

２．発表標題
双対性を考慮したCharacteristic basis function methodによる完全導体の散乱解析に関する一考察

３．学会等名
計算工学講演会

４．発表年
2023年

１．発表者名
新納和樹

２．発表標題
1次元熱方程式に対するHilbert型変換を用いたspace-time境界要素法に関する基礎的研究

３．学会等名
応用数理学会研究部会連合発表会

４．発表年
2023年

１．発表者名
田中泰

２．発表標題
Characteristic basis function methodとCalderonの前処理を用いた誘電体の散乱解析に関する一考察

３．学会等名
応用数理学会年会

４．発表年
2022年

１．発表者名
池上明日香

２．発表標題
3次元Helmholtz方程式に対する境界要素法へのCBFMの適用についての基礎的研究

３．学会等名
計算工学講演会

４．発表年
2022年

１．発表者名 Kazuki Niino
２．発表標題 The Galerkin method for a regularised combine difle integral equation without dual basis function
３．学会等名 Compumag 2023（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 森理人
２．発表標題 領域変形を伴う初期値境界値問題における時間域境界要素法の安定性に対する数値的解析手法
３．学会等名 計算工学講演会
４．発表年 2021年

１．発表者名 Kazuki Niino
２．発表標題 Calderon's preconditioner for the electric field integral equation discretised with the B-spline basis function and collocation
３．学会等名 IUTAM Symposium（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 竹内祐介
２．発表標題 Maxwell方程式に対する選点法を用いたisogeometric境界要素法における斜交メッシュ上でのCalderonの前処理に関する一考察
３．学会等名 日本応用数理学会年会
４．発表年 2021年

1．発表者名 押野佳世
2．発表標題 円筒側面に同相な完全導体における電磁波動散乱問題に対するisogeometric境界要素法について
3．学会等名 電子情報通信学会ソサイエティ大会
4．発表年 2021年

1．発表者名 竹内祐介
2．発表標題 Maxwell方程式に対するisogeometric境界要素法における斜行メッシュ上でのCalderonの前処理について
3．学会等名 電磁界理論シンポジウム
4．発表年 2021年

1．発表者名 山本隼平
2．発表標題 単一の基底のみを用いたGalerkin法による正則化したCFIEの離散化について
3．学会等名 応用数理学会研究部会連合発表会
4．発表年 2022年

1．発表者名 森理人，新納和樹
2．発表標題 領域変形を伴う初期値境界値問題における時間域境界要素法の安定性に対する数値的解析手法
3．学会等名 計算工学講演会
4．発表年 2021年

１．発表者名 田原寛太，新納和樹
２．発表標題 Maxwell方程式に対する選点法を用いたisogeometric境界積分法におけるCalderonの前処理について
３．学会等名 日本応用数理学会研究部会連合発表会
４．発表年 2021年

１．発表者名 Kazuki Niino, Naoshi Nishimura
２．発表標題 A formulation of the preconditioned EFIE using the Hdiv inner product with a single layer potential
３．学会等名 IEEE International symposium on antenna and propagation（国際学会）
４．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関