

令和 5 年 6 月 6 日現在

機関番号：10104

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2022

課題番号：20K14276

研究課題名(和文) 超幾何積分の幾何学的な研究

研究課題名(英文) Geometric study of hypergeometric integrals

研究代表者

後藤 良彰 (GOTO, Yoshiaki)

小樽商科大学・商学部・准教授

研究者番号：20742018

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：ねじれホモロジー群，コホモロジー群といった幾何学的な道具を用いて，超幾何関数を研究した。

Lauricella's F_C と呼ばれる超幾何に対し，モノドロミー群が有限既約になる場合についてその構造を詳しく調べた。確定特異点型のGKZ超幾何系の級数解に対応するねじれサイクルに対する交点数の明示公式を与えた。また，Riemann-Wirtinger 積分と呼ばれる，1次元複素トーラス上の超幾何積分に対する幾何学的な研究も行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超幾何関数は数学の諸分野のみならず，統計学，数理論理学においても登場する重要な関数の1つである。超幾何関数の研究は様々な方面から行われているが，特に積分表示およびそれに付随した幾何学的な構造(ホモロジー・コホモロジー)を利用して研究を進め，深く理解していくことで，多くの性質(公式など)を組織的に導出する方法が得られる。さらに，こうした性質が数理論理学などの関連分野へ応用されていくことも期待できる。

研究成果の概要(英文)：We studied some types of hypergeometric function by using geometric tools. For Lauricella's hypergeometric function F_C , we investigated the finite irreducible monodromy group. We derived explicit formulas for twisted cycles corresponding to series solutions to GKZ systems. Further, we studied the Riemann-Wirtinger integral which is given as a hypergeometric integral on a one dimensional complex torus.

研究分野：特殊関数，特に超幾何関数

キーワード：超幾何関数 超幾何積分 ねじれホモロジー群 ねじれコホモロジー群 モノドロミー群

1. 研究開始当初の背景

超幾何関数の研究手法の 1 つとして、Euler 型の積分表示に対応する「ねじれ(コ)ホモロジー群」及びその上の「交点形式」を利用するという方法がある。この手法をより広いクラスの超幾何関数に適用し、様々な性質の背景を探っていきたいと考えた。

Lauricella's F_C と呼ばれる多変数超幾何関数の積分表示に現れる多価関数は、その因子として高次式のべき関数を含むため、既存の議論では不十分な部分があったが、代表者による研究により少しずつ構造が明らかになってきていた。特に、モノドロミー表現に関して知見が集まってきており、モノドロミー群の深い構造を理解する準備が整ってきていた。

様々な超幾何系を含む大きなクラスとして、「GKZ 超幾何系」にも関心があった。松原宰栄氏(熊本大学)による先行研究で級数解に対応するねじれサイクルが構成されており、特別な場合(正則三角形分割がユニモジュラー)には、交点数の明示公式が与えられていた。一般の場合の交点数の公式の導出は課題として残っていた。

超幾何積分の多くは、射影直線や射影空間の上で考えることが多いが、種数 1 以上のコンパクトリーマン面上で考えるという一般化も知られていた。その例として、Riemann-Wirtinger 積分と呼ばれる超幾何積分が与えられており、眞野智行氏(琉球大学)と渡辺文彦氏(防衛大学校)によって(コ)ホモロジー群を用いた先行研究がなされていた。交点形式を用いた研究はまだ進んでいない状況であった。

2. 研究の目的

本研究ではねじれ(コ)ホモロジー群および交点形式といった幾何学的な手法を用いて、様々なタイプの超幾何関数を調べることが目標とした。

Lauricella's F_C と呼ばれる多変数超幾何関数について、モノドロミー群の構造が徐々に分かってきていた段階であったため、有限既約モノドロミー群の構造をより深く調べることが目指した。

確定特異点型の GKZ 超幾何系に関して、先行研究で与えられていた級数解に対応するサイクルに対し、交点数の明示公式を与えることが目標とした。明示公式が得られることで、様々な公式や性質も付随して得られると期待できる。

当初の計画では、Riemann-Wirtinger 積分について研究する予定はなかったが、射影空間以外の超幾何積分も調べていくことが必要であると感じ、研究を開始した。特に、交点数を具体的に計算すること及びそれを用いた種々の関係式の導出を目標とした。

3. 研究の方法

単独で進めた研究もあるが、共同研究も実施した。本来であれば、各地に赴き、共同研究者や分野の近い研究者と研究連絡を行うことで研究を進めていたところであるが、新型コロナウイルスの影響により、研究期間の大半で出張ができない状態であった。完全な代替とはならないが、メールやオンライン会議システム等を利用して研究を進めた。

計算機システム Maple 及び Mathematica を、公式の形を予想したり、得られた公式を確認したりすることに利用した。有限群に関する計算には GAP というシステムを利用し、 F_C の有限既約モノドロミー群の詳細な構造の研究に活用した。

また、オンラインや各地で行われている研究集会に参加し、得られた成果を発表することで、幅広く参考になる意見をいただいた。他の参加者の発表を聴き、最近の研究動向についての情報収集も行った。

4. 研究成果

(1)Lauricella's F_C のモノドロミー群の有限既約性、及びその構造

2 変数の場合の加藤満生氏による結果を多変数の場合に拡張することに成功した。具体的には、モノドロミー群の生成元の明示的表示および鏡映部分群の構造を精査することで、モノドロミー群の有限既約性の必要十分条件を記述し、さらに有限既約モノドロミー群の構造に関する定理を導いた。

(2)GKZ 超幾何系の級数解に対応するねじれサイクルの交点数

松原宰栄氏との共同研究で、確定特異点型の GKZ 超幾何系の級数解に対応するねじれサイクルの交点数を計算し、超幾何級数の間の 2 次関係式を明示的に記述した。松原氏の先行研究では、ユニモジュラーな三角形分割を持つ行列に付随する場合に対して、交点理論が整備されていた。本研究では、ユニモジュラーでない場合にも適切な被覆空間を用いることで、考えているねじれサイクルの交点数を組み合わせ論の言葉で明示的に記述することに成功した。また、交点数

の明示公式を用いることで、モノドロミー不変エルミート形式の符号に関する Beukers 氏, Verschoor 氏による予想を解決することもできた.

(3) Riemann-Wirtinger 積分に対する交点理論

Riemann-Wirtinger 積分と呼ばれている 1 次元複素トーラス上の超幾何積分に関する幾何学的研究を進めた. 眞野智行氏, 渡辺文彦氏によってねじれ(コ)ホモロジー群の基本的性質が調べられていたので, その基礎研究に基づき, Riemann-Wirtinger 積分に対しても交点理論の研究を進めた. 様々なサイクル, コサイクルに対して交点数を計算し, 既知の結果に対する交点形式を用いた再解釈を与えることができた. この結果を踏まえると, これまで射影空間上で行われてきたねじれ(コ)ホモロジー群と交点形式による超幾何積分の研究が, より一般の多様体の場合にも適用されていくことが期待できる.

いずれの結果も, 論文としてまとめ, 学術雑誌に掲載された.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Goto Yoshiaki	4. 巻 34
2. 論文標題 Intersection numbers of twisted homology and cohomology groups associated to the Riemann-Wirtinger integral	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X23500052	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 GOTO Yoshiaki	4. 巻 74
2. 論文標題 Lauricella's $\$F_C\$$ with finite irreducible monodromy group	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 151-175
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/83498349	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Goto Yoshiaki, Matsubara-Heo Saiei-Jaeyeong	4. 巻 33
2. 論文標題 Homology and cohomology intersection numbers of GKZ systems	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Indagationes Mathematicae	6. 最初と最後の頁 546-580
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.indag.2021.12.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 Wirtinger 積分に関するねじれ周期関係式
3. 学会等名 特殊多様体・特殊関数研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 コホモロジー交点形式と Riemann-Wirtinger 積分
3. 学会等名 第53回 大域解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松原 宰栄, 後藤 良彰
2. 発表標題 The signature of the invariant hermitian form for a regular holonomic GKZ system
3. 学会等名 日本数学会 2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 超幾何積分と被覆空間へのサイクルの持ち上げについて
3. 学会等名 2021年度 函数方程式論サマーセミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 Riemann-Wirtinger 積分に付随するホモロジーの交点数について
3. 学会等名 超幾何方程式研究会 2022
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------