

令和 6 年 6 月 9 日現在

機関番号：34304

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14279

研究課題名（和文）団理論の視点からのマッケイ対応とその拡張

研究課題名（英文）McKay correspondence and its expansion from the viewpoint of cluster theory

研究代表者

中嶋 祐介（Nakajima, Yusuke）

京都産業大学・理学部・助教

研究者番号：20783096

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000円

研究成果の概要（和文）：古典的マッケイ対応を拡張する際には、非可換クレパント特異点解消、団傾加群といった表現論的対象が現れる。これらの対象に対しては、「変異」なる操作を定義でき、変異を通じて団代数の理論との関係が見出される。本研究では、トーリック特異点・多様体に付随する対象の変異に注目し、その背後にある団構造やマッケイ対応との関係を考察した。主な成果として、以下の3件がある。
(1) 組合せ的変異を誘導する「ダイマー模型の変形」なる操作の確立 (2) グラスマン多様体のトーリック退化と組合せ的変異の関係の考察 (3) トーリックcDV特異点のクレパント特異点解消を与える安定性条件と、ダイマー模型のジグザグ道との関係性の解明

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究のトピックのひとつである「マッケイ対応」の発見以来、マッケイ対応を通じて様々な分野の関係性が見出されてきた。その関係性は新たな研究視点をもたらし、代数幾何・環論・表現論などの分野の発展につながっている。本研究で注目した「団理論」も同様に、複数の分野の背後に隠れている共通の構造を見出すものであり、分野の垣根を超えた研究が進んでいる。
本研究においては、マッケイ対応、団理論に関わる新たな研究成果を上げており、その成果は関連分野の研究に大きく寄与すると考える。また、本研究に現れるダイマー模型は、超弦理論・ミラー対称性といった物理学に関わる話題との親和性も高く、研究のさらなる広がりが見込まれる。

研究成果の概要（英文）：When we extend the classical McKay correspondence, some representation theoretic objects such as non-commutative crepant resolutions and cluster tilting modules appear. For these objects, we can define an operation called "mutation", which reveals connections with the theory of cluster algebras. In this study, we focused on mutations of some objects associated with toric singularities/varieties, and observed their underlying cluster structures and the relationships with the McKay correspondence.
The main results are as follows: (1) Establishment of the operation "deformation of dimer models" that induces the combinatorial mutation of polygons (2) Investigation of the relationship between toric degenerations of Grassmannians and combinatorial mutations (3) Clarification of stability conditions that give crepant resolutions of toric cDV singularities and their connection to zigzag paths on a dimer model.

研究分野：環論

キーワード：クレパント特異点解消 非可換クレパント特異点解消 マッケイ対応 ダイマー模型 団理論・団傾理論 変異 トーリック特異点 安定性条件

1. 研究開始当初の背景

マッカイ対応は、2次元商特異点を介して異なる数学的対象が結びつく現象であり、1970年代後半に発見されて以来、様々な分野間のつながりを見出し、相互の分野に発展をもたらしてきた。現在では、高次元商特異点や、商特異点以外の特異点に対するマッカイ対応の拡張の研究も盛んである。マッカイ対応を拡張しようとする際には、団傾加群や非可換クレパント特異点解消といった表現論的対象が現れる。これらの対象に対しては「変異」という操作を定義することができ、この操作を通じて団代数の理論(団理論)との関わりが見出される。団理論の中核をなす「団構造」は、多くの数学分野に現れることが近年明らかになっているため、団理論の視点をマッカイ対応の研究に取り入れることは「特異点を介した数学分野の新たな結びつき」を発見することにつながる。

マッカイ対応の拡張が試みられている特異点のひとつとして、トーリック特異点(トーリック環)が挙げられる。トーリック特異点には様々な組合せ論的対象が付随し、例えば、トーリック特異点を定義する際には多面体、3次元 Gorenstein トーリック特異点の団傾加群や非可換クレパント特異点解消を考える際には、ダイマー模型と呼ばれるグラフが現れる。これらの組合せ論的対象に対しては、変異が定義されるため、その変異から導かれる団構造を明らかにすることは、トーリック特異点およびマッカイ対応を理解するために重要である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、以下の2点である：

- (1) トーリック特異点・多様体に付随する組合せ論的対象を変異した際の振る舞いを考察し、その背後にある団構造を理解する。
- (2) 上記の組合せ論的対象の変異と、トーリック特異点の(非可換)クレパント特異点解消の関係を理解することにより、マッカイ対応をトーリック特異点に拡張する。

3. 研究の方法

上記の研究目的における(1)(2)に関して、トーリック特異点・多様体に付随する組合せ論的対象に注目するが、どちらの課題に関しても重要となる対象は、「ダイマー模型」と呼ばれる実2次元トーラス上に描かれた二部グラフである。より詳しく、(1)については、多面体の「組合せ的変異」なる操作と、ダイマー模型の「(団理論由来の)変異」に注目し、その振る舞いを考察することで、背後に隠れた団構造を理解する。(2)については、ダイマー模型から得られる3次元 Gorenstein トーリック特異点のクレパント特異点解消と非可換クレパント特異点解消に注目する。特にクレパント特異点解消の「フロップ」と非可換クレパント特異点解消の「変異」との関係を検討することにより、トーリック特異点に対するマッカイ対応の拡張を試みる。

4. 研究成果

上記の「研究の目的」で挙げた(1)に関しては、以下の2つの成果がある。

- ① ダイマー模型に対しては、「特性多角形」と呼ばれる凸多角形を構成することができる。一方、ミラー対称性の文脈において、凸多角形(より一般に凸多面体)の「組合せ的変異」と呼ばれる操作が導入され、ファノ多様体のミラー対称性の研究に利用されている。本研究においては、上記の事実注目し、特性多角形の組合せ的変異と整合的な性質を持つ、「ダイマー模型の変形」という操作を新たに考案した(東谷章弘氏との共同研究)。このダイマー模型の変形は、団理論における変異とは異なる操作であるが、特性多角形から誘導される箝(クイバー)を通じて、団理論における変異と関係する。本研究成果をまとめた論文は SIGMA (Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications) より出版された。
- ② グラスマン多様体は団構造を持つことが知られているが、その団構造は「plabic グラフ(あるいは円板上のダイマー模型)」と呼ばれるグラフから得ることができる。一方、グラスマン多様体を調べる際に有効な手法として、トーリック退化が知られており、トーリック退化を使うことにより、グラスマン多様体の様々な性質をトーリック多様体の言葉に置き換えて理解することができる。トーリック退化は plabic グラフを使って構成できることが知られているが、トーリック退化は一意的ではなく、異なるトーリック退化の間にある関係性が問

題となっていた。本研究（東谷章弘氏との共同研究）では、plabic グラフに対する変異と、トーリック退化に付随する多面体に対する組合せ的変異を比較し、異なるトーリック退化の関係を記述することに成功した。さらに、組合せ的変異と Gelfand-Tsetlin 多面体・FFLV 多面体といった表現論で重要な多面体との関連も明らかにした。本研究成果をまとめた論文は Advanced Studies in Pure Mathematics より出版された。

上記の「研究の目的」で挙げた(2)に関しては、以下の成果がある。

- ③ 3次元 Gorenstein トーリック特異点のクレパント特異点解消と非可換クレパント特異点解消は、ダイマー模型から構成できるが、その構成においては、ダイマー模型の双対として得られる簞の関係式付き道代数が重要である。特に、この道代数が非可換クレパント特異点解消になり、(射影的)クレパント特異点解消は、道代数上の「安定性条件」を満たす加群のモジュライ空間として実現される。クレパント特異点解消は一意的に定まるとは限らないが、安定性条件を取り替えることによって、すべてのクレパント特異点解消を構成できることが知られている。安定性条件を与えるパラメータの集合は「部屋構造」を持っており、同じ部屋に属するパラメータからは同じクレパント特異点解消が得られるが、壁を越えて部屋が変わると、クレパント特異点解消の構造も変わり得る(クレパント特異点解消が変わる際には、フロップという現象が起こる)。よって、この部屋構造を理解することがクレパント特異点解消を理解する上で重要である。本研究では、トーリック cDV (compound Du Val) 特異点の場合について、上記の部屋構造と壁越えをダイマー模型の組合せ論的性質を用いて考察した。その結果、ダイマー模型上に定義される「ジグザグ道」の順序列を用いて、部屋構造・壁越えを記述できることを明らかにした。さらには、ジグザグ道に注目することにより、壁越えをした際のクレパント特異点解消の変化、安定性条件を満たす加群の変化も捉えられる事を示した。この結果は「ホモロジカル極小モデル理論」を用いて既に考察されていた、A型のcDV特異点の極小モデル(クレパント特異点解消)に関する性質と、ダイマー模型の組合せ論的性質を結びつけるものとなっている。本研究に関しては、論文を執筆し、arXivにて公開(arXiv:2309.16112)した他、いくつかの研究集会・セミナーで発表を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Akihiro Higashitani, Yusuke Nakajima	4. 巻 18
2. 論文標題 Deformations of Dimer Models	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 53 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2022.030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Nakajima	4. 巻 73
2. 論文標題 On 2-Representation Infinite Algebras Arising From Dimer Models	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Quarterly Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1517 ~ 1553
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/qmath/haac016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jack Jeffries, Yusuke Nakajima, Ilya Smirnov, Kei-ichi Watanabe, Ken-ichi Yoshida	4. 巻 174
2. 論文標題 Lower bounds on Hilbert-Kunz multiplicities and maximal F-signatures	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 247 ~ 271
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0305004122000238	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Akihiro Higashitani, Yusuke Nakajima	4. 巻 65
2. 論文標題 Generalized F-signatures of Hibi rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Illinois Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 97 ~ 120
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/00192082-8827655	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akihiro Higashitani, Yusuke Nakajima	4. 巻 88
2. 論文標題 Combinatorial mutations of Newton-Okounkov polytopes arising from plabic graphs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics, McKay Correspondence, Mutation and Related Topics	6. 最初と最後の頁 227 ~ 278
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08810227	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yusuke Nakajima	4. 巻 -
2. 論文標題 Wall-and-chamber structures of stability parameters for some dimer quivers	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 The proceedings of the 55th Symposium on Ring Theory and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 58 ~ 65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Dimer combinatorics for 3-dimensional toric hypersurfaces
3. 学会等名 IPMU特異点セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Dimer combinatorics for toric cDV singularities
3. 学会等名 特異点論月曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Combinatorial mutations and deformations of dimer models
3. 学会等名 Nottingham University, Online Algebraic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Combinatorial mutations of polytopes arising from plabic graphs
3. 学会等名 Infinite Analysis 21 Workshop Around Cluster Algebras (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 The Homological MMP for three dimensional toric hypersurfaces
3. 学会等名 可換環論の新しい融合セミナーII (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On non-commutative crepant resolutions of toric singularities
3. 学会等名 阪大オンライン代数幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Combinatorial mutations of polygons via dimer models
3. 学会等名 McKay correspondence, mutation and related topics (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Representation theory of algebras arising from dimer models
3. 学会等名 OCAMI代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 On crepant resolutions of toric cDV singularities
3. 学会等名 東京可換環論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Wall-and-chamber structures of stability parameters for some dimer quivers
3. 学会等名 第55回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Dimer models in representation theory (Gong show talk)
3. 学会等名 Sifting in Representation Theory, Singularities, and Noncommutative Geometry (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Projective crepant resolutions of toric cDV singularities and dimer combinatorics
3. 学会等名 McKay correspondence, Tilting theory and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Wall-and-chamber structures for algebras associated to toric cDV singularities
3. 学会等名 南大阪代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 Mutations and wall-crossings for dimer models associated to toric cDV singularities
3. 学会等名 Advances in Cluster Algebras 2024 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Yusuke Nakajima
2. 発表標題 New examples of toric NCCRs arising from conic modules
3. 学会等名 正標数の可換環論とその周辺2024 in 淡路島 (招待講演)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Yusuke Nakajima's Web Page https://sites.google.com/view/nakajima-math

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	University of Nebraska, Lincoln		
スペイン	Basque Center for Applied Mathematics		