

令和 6 年 4 月 30 日現在

機関番号：24405

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14286

研究課題名（和文）量子対称対のウェイト表現と結晶基底

研究課題名（英文）Weight modules and crystal bases for quantum symmetric pairs

研究代表者

渡邊 英也（Watanabe, Hideya）

大阪公立大学・数学研究所・学振特別研究員（PD）

研究者番号：10848782

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：量子対称対の表現論を組合せ論的にわかりやすく記述する「結晶基底」の理論の基礎を構築した。これにより、複雑な構造をもつ種々の表現を、初等的な演算で計算によって理解することが可能になった。リー代数の表現論や、離散力学系などへの応用も見つかった。また、量子対称対の構造論において中心的な役割を果たす「標準基底」を、結晶基底の考え方を取り入れて考察した。結果として、標準基底は「安定性」という著しい性質を持つことが明らかになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究において、量子対称対の結晶基底の理論の基礎が初めて築かれ、また結晶基底の安定性が確認された。これらの結果は、当該研究分野（量子対称対の表現論）だけでなく、リー代数の表現論、量子群の表現論、離散力学系、可積分系、幾何学的表現論、圏論的表現論など多数の分野にまたがるものであり、様々な方向にさらなる発展を促すものである。

研究成果の概要（英文）：The basic of the theory of crystal bases for quantum symmetric pairs, which describes combinatorially the representation theory of quantum symmetric pairs, was established. This theory enables one to understand various complex representations via elementary calculation. Also, applications to the representation theory of Lie algebras and discrete dynamics were discovered.

We also investigated the canonical bases of quantum symmetric pairs, which play a central role in the structure theory of quantum symmetric pairs, with an idea of crystal bases in mind. As a result, it turned out that the canonical bases are stable.

研究分野：表現論

キーワード：量子対称対 表現論 結晶基底 標準基底

### 1. 研究開始当初の背景

量子対称対は、量子群と、そのある部分余イデアル部分代数である量子対称部分代数の組から成り、非可換量子調和解析学の舞台として導入された。以下、簡単のため後者を指して量子対称対と称す。Huanchen Bao と Weiqiang Wang による、量子対称対を用いた直行斜交 Lie 超代数の Kazhdan-Lusztig 理論に関する論文を契機として、量子対称対は量子群の一般化であり、量子群に関する数々の理論は量子対称対にまで自然に拡張されるはずだという考え方が広がっていった。実際、量子群における準 R 行列、普遍的 R 行列、標準基底、Schur 双対性などの理論が、量子対称対における準 K 行列、普遍的 K 行列、B 型 Schur 双対性などにそれぞれ拡張され、それぞれの結果がさらなる応用をもたらした。

一方で、量子群の理論において基礎的な役割を果たす表現論(分類や構造理論)に相当する理論は、量子対称対では未だ十分に発展していない。理論物理学からの興味を動機付けとして、非常に特別な場合に限って量子対称対の表現論を考察している先行研究はあるが、一般的な量子対称対の表現論を統一的に捉える理論は全く形成されていない。このような現状は、量子群における様々な重要な結果が量子対称対にまで自然に拡張されているという事実を鑑みると非常に不自然であり、量子対称対のさらなる発展のためには表現論が必要不可欠であることは明らかである。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、量子対称対の有限次元ウェイト表現を分類し、ウェイト表現の構造を組合せ論的に解析するための指導原理を提示することである。

量子群は、複素半単純リー代数を量子化(パラメータ  $q$  で変形)した代数である。量子群の表現論の研究は、元のリー代数の表現論だけでなく、関連する他の代数の表現論や結び目理論、可積分系などの発展に大きく寄与してきた。前項「1. 研究開始当初の背景」で述べた通り、量子対称対は量子群の一般化であり、量子群において成り立つ様々な重要な事実が、量子対称対の場合にまで自然に拡張されることがわかっている。しかし、量子対称対の表現の分類や構造理論の発展が著しく遅れている。本研究では、考察対象をウェイト表現という特別なクラスに限定して、有限次元表現を分類する。さらに、量子群の表現論における結晶基底の理論を、量子対称対の表現論に拡張することを目指す。これは、新しい組合せ論的表現論の新たな学術領域の開拓に繋がる。

### 3. 研究の方法

まず、量子対称対の表現論にウェイト表現なる概念を導入するために、量子対称対を再構成する。量子群と量子対称対は、どちらも生成元と関係式で定義されているが、両者の定義は大きく異なっている。このため、定義だけを見ても、「量子対称対は量子群の一般化である」ということが直にはわからない。さらに、量子群の表現論でよく研究されているウェイト表現は、この生成元を用いて定義される。したがって、量子対称対のウェイト表現を定義するためには、量子対称対の定義を、量子群のそれに似たようなものにしなければならない。これには、量子対称対の各表現に働く作用素のなす代数として量子対称対を定義し直し、適切な生成元を選び出すことで取り組む。

次に、量子対称対のウェイト表現の構造を解析するために、再構成された量子対称対の代数構造を調べる。量子群の表現論は、ある小さい部分代数によって統制されている。再構成された量子対称対の部分代数で、この小さい部分代数に相当するものを特定し、その代数構造が量子群の小さい部分代数に似ていることが確認できれば、量子対称対のウェイト表現の構造も量子群の場合と同様の手法で解析できる。この小さい部分代数を特定するためには、量子化する前の対称対の代数構造を詳しく調べる必要がある。対称対の同型類が有限個であることから、計算機を用いて取り組む。

### 4. 研究成果

量子対称対のウェイト表現という概念を導入し、その分類や構造理論のための一般論を展開し

た。結果として、A型というクラスに属する量子対称対の有限次元ウェイト表現を分類し、構造をある程度解明することに成功した。

量子対称対の表現論を組合せ論的に記述する結晶基底の理論を定式化した。この手法で量子対称対の表現論を理解することによって、特別な場合には、後述する標準基底の安定性を証明することができた。他の応用として古典型の複素単純リー代数の表現論の新しい組合せ論的モデルを構築したり、分岐則を得たりした。さらに、離散力学系における反射方程式の解を組合せ論的かつ系統的に構成することに成功した。この他にも、結晶基底の理論においては、表現論的あるいは組合せ論的に興味深い現象がいくつも観察されており、今後のさらなる発展が期待される。

標準基底の安定性は、量子対称対の表現論の幾何学的あるいは圏論的解釈のために必須の性質であるが、その正しさは未だ完全には保証されていない。準分裂局所有限型という特別な場合には、前述の結晶基底の理論を適用することで証明された。その後、本研究において、標準基底の安定性と結晶基底の理論は密接に関係していることが判明し、結晶基底の理論の考え方を取り入れることで、局所有限型という非常に一般的な場合にまで安定性の証明を拡張することに成功した。このように十分に一般的に標準基底が安定性を有することが明らかになったことで、先に触れた幾何学的あるいは圏論的解釈が現実味を帯び、関連する研究が促進された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kusano Hiroto, Okado Masato, Watanabe Hideya	4. 巻 405
2. 論文標題 Kirillov-Reshetikhin Modules and Quantum K-matrices	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-024-04975-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Hideya	4. 巻 27
2. 論文標題 Stability of icanonical bases of irreducible finite type of real rank one	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Representation Theory of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1~29
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/ert/639	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Hideya	4. 巻 303
2. 論文標題 Based modules over the $\mathfrak{imath}$ quantum group of type A1	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-022-03189-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Hideya	4. 巻 578
2. 論文標題 Classical weight modules over iquantum groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 241~302
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2021.02.023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Hideya	4. 巻 27
2. 論文標題 Crystal Bases of Modified $\mathfrak{q}$ -Quantum Groups of Certain Quasi-Split Types	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 1 ~ 76
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10468-023-10207-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Hideya	4. 巻 58
2. 論文標題 A new tableau model for representations of the special orthogonal group	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 183 ~ 230
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10801-023-01245-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bao Huanchen, Wang Weiqiang, Watanabe Hideya	4. 巻 224
2. 論文標題 Canonical bases for tensor products and super Kazhdan-Lusztig theory	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 106347 ~ 106347
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2020.106347	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fan Zhaobing, Lai Chun-Ju, Li Yiqiang, Luo Li, Wang Weiqiang, Watanabe, Hideya	4. 巻 27
2. 論文標題 Quantum Schur duality of affine type C with three parameters	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Research Letters	6. 最初と最後の頁 79 ~ 114
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計15件(うち招待講演 11件/うち国際学会 3件)

1. 発表者名 渡邊英也
2. 発表標題 一般線形群から斜交群への分岐則と量子対称対
3. 学会等名 東工大表現論セミナー(招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Hideya Watanabe
2. 発表標題 Recent progress on crystal base theory for quantum symmetric pairs
3. 学会等名 Taipei Conference on Representation Theory VII(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡邊英也
2. 発表標題 A new branching rule from $GL(C)$ to $Sp(C)$
3. 学会等名 表現論の組合せ論的側面とその周辺(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡邊英也
2. 発表標題 Stability of canonical bases of quantum symmetric pairs
3. 学会等名 南大阪代数セミナー(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡邊英也
2. 発表標題 量子対称対の表現論から得られる一般線形群から斜交群への分岐則
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡邊英也
2. 発表標題 局所有限型 $i$ 標準基底の安定性について
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 渡邊英也
2. 発表標題 有限型実階数 1 の $\mathfrak{sl}_n$ 標準基底について
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hideya Watanabe
2. 発表標題 Invitation to crystal bases for quantum symmetric pairs
3. 学会等名 Mini Course on Quantum Symmetric Pairs in Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hideya Watanabe
2. 発表標題 Crystal bases of modified $i$ -quantum groups of certain quasi-split types
3. 学会等名 UVA Algebra Seminar (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hideya Watanabe
2. 発表標題 Based modules over the $i$ -quantum group of type $A1$
3. 学会等名 NUS Seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hideya Watanabe
2. 発表標題 Based modules over the $i$ -quantum group of type $A1$
3. 学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Watanabe Hideya
2. 発表標題 Based modules over the $i$ -quantum groups of type $A1$
3. 学会等名 東京名古屋代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 Watanabe Hideya
2. 発表標題 Recent progress on representation theory of iquantum groups
3. 学会等名 立教大学数理物理セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Watanabe Hideya
2. 発表標題 Crystal bases of quantum groups and centralizer algebras
3. 学会等名 代数学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Watanabe Hideya
2. 発表標題 Combinatorial representation theory arising from quantum symmetric pairs
3. 学会等名 KIAS Workshop on Combinatorial Problems of Algebraic Origin（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Dualities in Quantum Groups	開催年 2024年～2024年
国際研究集会 Integrable Systems and Quantum Groups	開催年 2023年～2023年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------