

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：24405

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14288

研究課題名（和文）楕円代数の包括的研究と非可換代数幾何学の新展開

研究課題名（英文）A comprehensive study of elliptic algebras and new development of noncommutative algebraic geometry

研究代表者

神田 遼（Kanda, Ryo）

大阪公立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：50748324

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：FeiginとOdesskiiによって導入された楕円代数は、正則代数の典型例である（高次元）Sklyanin代数の一般化である。本研究課題では、Alex Chirvasitu氏およびS. Paul Smith氏との共同研究により、楕円代数の様々な代数的性質・幾何的性質を明らかにした。楕円代数のモジュラー性に関する結果においては、楕円代数を定義するパラメータを変化させた場合の、楕円代数の間の同型写像を得ることができた。楕円代数に付随するポアソン構造が定めるシンプレクティック葉に対して、割線多様体による記述を与えることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

楕円代数は高次元正則代数の重要な例であるため、本研究課題における楕円代数の代数的性質・幾何的性質に関する結果は、未解決問題である高次元正則代数の分類に寄与するものと考えられる。また、FeiginとOdesskiiらによる楕円代数に関する原論文には、証明が与えられていない定理が多く含まれていたが、本研究課題の成果である論文において、そのいくつかに完全かつ明瞭な証明を与えることができたため、今後の楕円代数の研究の一層の推進が期待される。

研究成果の概要（英文）：The elliptic algebras introduced by Feigin and Odesskii are generalizations of (higher-dimensional) Sklyanin algebras, which are typical examples of regular algebras. In this research project, through collaborative work with Alex Chirvasitu and S. Paul Smith, we elucidated various algebraic and geometric properties of elliptic algebras. Regarding the modularity of elliptic algebras, we obtained isomorphisms between elliptic algebras by varying the parameters that define them. For the symplectic leaves determined by the Poisson structure associated with the elliptic algebras, we provided descriptions using secant varieties.

研究分野：非可換代数幾何学

キーワード：Feigin-Odesskii楕円代数 Artin-Schelter正則代数 Koszul代数 Yang-Baxter方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

正則代数 (Artin-Schelter の意味での非可換な次数付き正則代数) の分類は非可換代数幾何学における主要な問題の 1 つであり、1987 年の Artin-Schelter による 3 次元正則代数の部分的分類から始まった。1990 年には Artin-Tate-Van den Bergh により、3 次元正則代数に付随する幾何学的対象 (スキーム、直線束、自己同型の 3 つ組) を構成することで 3 次元正則代数を幾何学的に調べ、分類するための枠組みが確立され、3 次元正則代数の分類は現在に至るまで大きく進展している。一方、4 次元以上の正則代数に対しては、3 次元の場合のような幾何学的な手法は確立されておらず、どのような代数のクラスが含まれるかが明らかでないため、正則代数の豊富な例を得ること、および既存の正則代数の例を詳しく調べることが重要となる。

本研究課題における主たる研究対象である楕円代数は、Feigin-Odesskii によって 1990 年頃から研究されていた代数のクラスであり、その中には量子逆散乱法を動機として Sklyanin によって導入された (4 次元) Sklyanin 代数、およびその一般化である高次元 Sklyanin 代数が含まれる。Sklyanin は Sklyanin 代数が 4 変数多項式環と同じ Hilbert 級数を持つことを予想したが、1992 年に Smith-Stafford はその予想を肯定的に解決し、さらに Sklyanin 代数が 4 次元正則代数であることを明らかにした。1996 年には Tate-Van den Bergh によって高次元 Sklyanin 代数が正則代数であることが示され、さらに高次元 Sklyanin 代数の様々な代数的性質が明らかとなった。高次元 Sklyanin 代数は高次元正則代数の典型例として、様々な観点からその性質が調べられている。

一方、高次元 Sklyanin 代数とは限らない楕円代数については先行研究はあったものの、高次元 Sklyanin 代数と比べるとあまり多くは知られていない状況であった。しかしながら、Feigin-Odesskii による楕円代数の特性多様体に関する考察によれば、一般の楕円代数は高次元 Sklyanin 代数と比べてはるかに多様であるため、その研究は重要な課題であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、代数的手法・幾何的手法を用いて、楕円代数を様々な側面から研究することである。高次元 Sklyanin 代数の場合に知られている Hilbert 級数に関する結果、Koszul 性や正則性に関する結果、そして楕円代数のパラメーターを変化させた場合の挙動に関する結果を、楕円代数に一般化することは重要な問題である。また、Tate-Van den Bergh が高次元 Sklyanin 代数を分析する際に確立した幾何学的手法を、楕円代数に一般化することができれば、楕円代数の性質を調べる際の強力な道具になることが期待される。

Feigin と Odesskii らによる楕円代数に関する論文には、証明が与えられていない定理が多く含まれていたため、その定理に完全な証明を付けることで楕円代数の理論を整備していくことも本研究課題の目的である。

3. 研究の方法

(1) 本研究の主たる部分は、Alex Chirvasitu 氏および S. Paul Smith 氏との共同研究により実施した。

(2) 2021 年度には Aaron Chan 氏、源 泰幸 氏、宮地 兵衛 氏と共同で研究集会「Winter School on Koszul Algebra and Koszul Duality」を開催することで、楕円代数が持つ Koszul 性に関する情報収集を行った。

(3) 2022 年度には中嶋 祐介 氏、東谷 章弘 氏と共同で研究集会「第 43 回可換環論シンポジウム」を、2023 年度には上山 健太 氏らと共同で研究集会「第 55 回環論および表現論シンポジウム」を開催することで、可換環論および非可換環論の研究者との議論・情報交換を通じて本研究課題を推進した。

(4) オンラインを活用した研究セミナーである「OCAMI 代数セミナー」、「OCAMI 環論セミナー」および江尻 祥 氏、佐野 昂迪 氏、松澤 陽介 氏と共同で開催した「杉本代数セミナー」などにおいて、代数分野の研究者との定期的な交流を通じて、本研究課題に必要な情報収集を行った。

4. 研究成果

(1) 研究代表者は Alex Chirvasitu 氏・S. Paul Smith 氏との共同研究において、高次元 Sklyanin 代数の場合に知られている Hilbert 級数に関する結果を一般化した。 n 次元楕円代数の Hilbert 級数が、ほとんどの場合に n 変数多項式環の Hilbert 級数と同じであることを証明し、楕円代数を定義するパラメーターがどのような場合に例外が起こり得るかを明らかにした。この帰結として、それらの例外が起こり得るパラメーターの場合を除いて、楕円代数は Koszul 性を持つことが示された。

また、楕円代数がほとんどの場合に正則代数となることが示され、高次元 Sklyanin 代数と同様に、楕円代数も高次元正則代数の例となっていることが明らかとなった。これらの証明には Yang-Baxter 方程式の解である R 行列が重要な役割を果たした。さらに、この R 行列によって Feigin-Odesskii 楕円代数の積構造が簡明な形で理解できることが明らかとなった。

(2) 研究代表者は Alex Chirvasitu 氏・S. Paul Smith 氏との共同研究において、Tate-Van den Bergh による高次元 Sklyanin 代数の間の同型写像と同様の同型写像が、一般の楕円代数の間にも存在することを明らかにした。これらの同型写像は整数係数の 2 次特殊線型群の元から引き起こされるものであるため、楕円代数がある種のモジュラー的性質を持つものと解釈される。

(3) 研究代表者は Alex Chirvasitu 氏・S. Paul Smith 氏との共同研究において、楕円代数に付随するポアソン構造に関する研究を行い、そのポアソン構造が定めるシンプレクティック葉に対して、割線多様体による記述を与え、その成果をプレプリントとして発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Ryo Kanda and Tsutomu Nakamura	4. 巻 27
2. 論文標題 Flat cotorsion modules over Noether algebras	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Doc. Math.	6. 最初と最後の頁 1101-1167
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.25537/dm.2022v27.1101-1167	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Alex Chirvasitu and Ryo Kanda	4. 巻 73
2. 論文標題 Flat families of point schemes for connected graded algebras	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Michigan Math. J.	6. 最初と最後の頁 195-208
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1307/mmj/20205939	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Alex Chirvasitu, Ryo Kanda, and S. Paul Smith	4. 巻 29
2. 論文標題 Elliptic R-matrices and Feigin and Odesskii's elliptic algebras	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Selecta Math. (N.S.)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-023-00827-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Ryo Kanda	4. 巻 227
2. 論文標題 Projective discrete modules over profinite groups	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Pure Appl. Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2022.107260	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Alex Chirvasitu, Ryo Kanda, and S. Paul Smith	4. 巻 581
2. 論文標題 Feigin and Odesskii's elliptic algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 173-225
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.04.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ryo Kanda	4. 巻 592
2. 論文標題 Integrality of noetherian Grothendieck categories	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 233-299
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.10.036	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ryo Kanda	4. 巻 225
2. 論文標題 Extension groups between atoms in abelian categories	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Pure Appl. Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2021.106669	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Alex Chirvasitu, Ryo Kanda, and S. Paul Smith	4. 巻 9
2. 論文標題 Maps from Feigin and Odesskii's elliptic algebras to twisted homogeneous coordinate rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Forum Math. Sigma	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2020.60	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Projective objects in the category of discrete modules over a profinite group
3. 学会等名 第33回可換環論セミナー, Zoom, オンライン
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Projective objects in the category of discrete modules over a profinite group
3. 学会等名 第54回環論および表現論シンポジウム, 埼玉大学, 日本
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Flat cotorsion modules over Noether algebras
3. 学会等名 東京名古屋代数セミナー, Zoom, オンライン (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Elliptic algebras and twisted homogeneous coordinate rings
3. 学会等名 オンライン可換環論セミナー2021, Zoom, オンライン
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryo Kanda and Tsutomu Nakamura
2. 発表標題 Structure theorem for flat cotorsion modules over Noether algebras
3. 学会等名 第53回環論および表現論シンポジウム, Zoom, オンライン
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryo Kanda and Tsutomu Nakamura
2. 発表標題 Flat cotorsion modules over Noether algebras and elementary duality of Ziegler spectra
3. 学会等名 第42回可換環論シンポジウム, Zoom, オンライン
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Exactness of direct products
3. 学会等名 可換環論の新しい融合セミナー II, 大阪市立大学, 日本 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Feigin-Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 京都表現論セミナー, Zoom, オンライン (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Extension groups between atoms in abelian categories
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会, Zoom, オンライン
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Elliptic algebras
3. 学会等名 The 9th China-Japan-Korea International Conference on Ring and Module Theory, Incheon National University, 韓国(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Feigin and Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム2023, 城崎国際アートセンター, 日本(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Flat cotorsion modules and pure-injective modules
3. 学会等名 環論表現論ワークショップ in 信州, 信州大学, 日本(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ryo Kanda
2. 発表標題 Feigin-Odesskii's elliptic algebras
3. 学会等名 神楽坂代数セミナー, 東京理科大学, 日本 (招待講演)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Ryo Kanda https://ryokanda.net
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------