

令和 5 年 6 月 14 日現在

機関番号：53203

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2022

課題番号：20K14289

研究課題名（和文）多重ゼータ値の2-パラメータ変形の研究

研究課題名（英文）Study of two-parameter deformations of multiple zeta values

研究代表者

加藤 正輝（Kato, Masaki）

富山高等専門学校・その他部局等・助教

研究者番号：70834399

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,200,000円

研究成果の概要（和文）：研究代表者は、先行研究において多重ゼータ値の2-パラメータ変形とみなすことができる積分 I_n を導入した。本研究の目的は、多重ゼータ値に関するさまざまな研究結果が、積分 I_n にどのように一般化されるかを調べることであり、そして、得られた結果の数論等への応用について研究することである。研究期間を通して以下の事項について成果が得られた：(1) ルート系のゼータ関数の q -類似・楕円類似、(2) 和の母関数の満たす q -差分方程式、(3) 多重ポリログ関数のparity resultの q -類似・楕円類似。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、多重ゼータ値や多重ポリログ関数の2-パラメータ変形とみなせる特殊関数を研究した。この特殊関数は、新谷卓郎によって導入された二重正弦関数の対数微分である二重余接関数やRuijsenaarsによって導入された楕円ガンマ関数の対数微分である楕円digamma関数等とも密接に関連している。本研究の成果により、様々な特殊関数を系統的に研究するための基礎が固まった。特殊関数は数学のみならず物理学や工学においても重要な役割を果たす。そのため、本研究の成果は、自然科学の様々な分野において将来的に応用され得るものである。

研究成果の概要（英文）：In a previous study, we introduce integrals I_n regarded as two-parameter deformations of multiple zeta values. The purpose of this study is to investigate the generalization of various formulas satisfied by multiple zeta values to I_n and apply the obtained results to areas such as number theory. Through this study, we obtained the results concerning the following: (1) q - and elliptic analogues of zeta functions of root systems, (2) q -difference equation satisfied by generating functions of sums, (3) parity results for q - and elliptic analogues of multiple polylogarithms.

研究分野：特殊関数論

キーワード：多重ポリログ関数 q -類似 2-パラメータ変形 ルート系 q -超幾何関数 多重ゼータ値 q -差分方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

二重正弦関数は、整数論や数理論理学において様々な興味深い応用を持つことが知られている特殊関数である。特に整数論においては、その特殊値が実二次体の類体に属する単数であろうという新谷卓郎 (1978) による予想がある。二重正弦関数は黒川信重によって多重正弦関数に一般化され、様々な研究がなされてきた。ところが、新谷卓郎の研究から 40 年以上経った現在でも、二重正弦関数の性質については依然として未解明の部分が多く残されている。特に、特殊値の代数性については、新谷卓郎の研究以降、研究開始当初まで大きな進展はなかった。

二重正弦関数の特殊値の性質の理解が難しい理由の一つは、二重正弦関数がいかなる関数関係式を満たすかについて十分な成果が得られていないからであると考えられる。特に、二重正弦関数の満たす加法公式を求める問題については、申請者の研究以前には、形式群を用いた黒川・小山(2013)による研究があるのみであった。ところが、黒川・小山の公式には二重正弦関数の高次微分係数で表される、明示的な表示を持たない量が現れる。そのため、この公式には、それを応用して結果を得ることが難しいという問題点があった。そこで、申請者は、黒川・小山による研究とは異なるアプローチから、加法公式を求める問題について研究してきた。

申請者は、古典的な Eisenstein による三角関数・楕円関数論で用いられている手法を一般化することにより、二重正弦関数や楕円ガンマ関数の対数微分が、ある加法型公式を満たすことを示した。ここで、楕円ガンマ関数とは、 $0 < |p| < 1$, $0 < |q| < 1$ なる複素パラメータ p , q を持つ特殊関数である。楕円ガンマ関数は、 $p \rightarrow 0$ の極限で q -ガンマ関数に退化することから、通常のガンマ関数の 2-パラメータ変形とみなせる。また、楕円ガンマ関数の適当なスケール極限は二重正弦関数に一致することも知られている。

楕円ガンマの対数微分(楕円 digamma)関数の満たす上記の加法型公式には、2つのパラメータ p , q を含むある積分 I が現れる。積分 I は、 $p \rightarrow 0$ の極限により、 q -二重ゼータ値の母関数に退化する。ここで二重ゼータ値は、多重ゼータ値という無限級数で定義される実数の深さ 2 の場合である。

そこで、一般の深さの多重ゼータ値に対しても、二重の場合と同様の 2-パラメータ変形があるのではないかと問うのは自然であろう。申請者は、先行研究において、それを、ある多重積分 I_n として構成した。多重ゼータ値の基本的な関係式として調和積公式およびシャッフ積公式というもの知られているが、これらの関係式が、積分 I_n にまで一般化されることを示した。

2. 研究の目的

多重ゼータ値の理論において、調和積公式とシャッフ積公式の二通りの展開を比較することで豊富な関係式(複シャッフ関係式)が得ることが出来る。そこで、積分 I_n に対しても、現時点では明らかにはなっていない様々な関係式が存在することが期待される。この関係式を明示的に計算すること、そしてその背景を明らかにすることを通して、二重正弦関数や楕円ガンマ関数および関連する他の特殊関数が数論等へどのように応用されるかを解明することが、解明すべき課題として生じる。

本研究は、多重ゼータ値に関するさまざまな研究結果が、多重ゼータ値の 2 パラメータ変形とみなせる積分 I_n にどのように一般化されるかを調べることで、そして、得られた結果の数論等への応用について研究することを目的とする。

3. 研究の方法

(1) ルート系のゼータ関数の 2-パラメータ変形

ルート系のゼータ関数は、Witten によって導入された半単純 Lie 代数に付随するゼータ関数を多変数に拡張したものとして、小森・松本・津村によって導入・研究されている関数である。ルート系ゼータ関数は様々な興味深い性質を持つことが知られているが、その A_r 型の正整数点での値の 2-パラメータ変形とみなせる、ある多重積分は申請者の積分 I_n に関する先行研究の中に表れている。この積分は、凡そ、 A_r 型のルート系ゼータ関数の定義式の級数を積分に置き換えたようなものになっているため、 A_r 型以外のルート系のゼータ関数についても、同様の一般化を考えることができる。本研究では、このように定義されるルート系ゼータ関数の 2-パラメータ変形について考察する。特に、Weyl 群の作用に対する対称性を用いた特殊値の計算を重点的に行う。

(2) 積分 I_n およびその母関数の満たす差分関係式の研究

多重ゼータ値の関係式を導出するために用いられてきた方法として、その適当な母関数の満たす関係式を計算するというものがある。例として、大野-Zagier は、多重ポリログ関数の重さ、深さ、高さを固定した和の母関数が Gauss の超幾何微分方程式をみたすことと、Gauss の和公式から、多重ゼータ値の非自明な関係式を系統的に導出している。この大野-Zagier の研究に

については、 q -多重ゼータ値に対しても類似の結果が成り立つことが知られている。本研究においては、申請者によって導入された積分 I_n やその母関数の満たす差分関係式を計算し、 I_n の関係式を導出することを目指す。特に、大野-Zagier により研究されたものと類似の母関数を構成し、それが満たす q -差分方程式と超幾何関数の関係を調べる。

4. 研究成果

(1) ルート系のゼータ関数の 2-パラメータ変形

ルート系ゼータ関数の q -類似を構成しその基本的性質を調べた。この関数の、Weyl 群の作用について対称性を持つ和が、Kronecker 関数の積のトラス上の積分で表示できることがわかった。特に対応するルート系が A_2 , A_3 型の場合は、Kronecker 関数の満たす基本的公式である Fay 恒等式を用いることにより、Gunnells-Sczech よる Witten 体積公式の明示公式の q -類似が得られる。

ルート系ゼータ関数は、Witten 体積公式を含む関数関係式を満たすことが知られている。この関数関係式の q -類似について考察した。Weyl 群のある種の部分集合に関する和の積分表示と Kronecker 関数の満たす基本公式である Fay 恒等式から、 A_2 , A_3 , B_2 , G_2 型のゼータ関数の q -類似の満たす関数等式を導出した。特に $q \rightarrow 1$ の極限をとると、通常のルート系ゼータ関数の満たす関数等式が得られる。

さらに、ルート系ゼータ関数の q -類似の p -変形（ルート系ゼータ関数の 2-パラメータ変形）を導入し基本的性質を調べた。Macdonald(1972) の定理（彼は、この定理からルート系に付随する Poincare 多項式の因数分解公式を導いた）を用いることにより、(a) の結果は、 p -変形の場合に一般化される。

(2) 積分 I_n およびその母関数の満たす差分関係式の研究

積分 I_n の満たす q -差分漸化式を求めた。さらに、 I_n の重さ、深さ、高さを固定した和の母関数を導入し、それが満たす q -差分方程式を導出した。 I_n をパラメータ p のべき級数に展開し、「定数変化法」と q -超幾何関数 $2-1$ の満たす Heine 変換公式を用いることで、この q -差分方程式を解くことに成功した。パラメータ p が 0 のとき、 q -超幾何関数の変換公式を用いることで、 q -多重ポリログ関数の和の母関数を単独の q -超幾何関数で表す公式が得られる。特に独立変数の値が q のときは、Li-Wakabayashi(2019)による結果（補間 q -多重ゼータ値の和の母関数は q -超幾何関数 $3-2$ で表される）が復元される。

さらに、一般化された高さの概念を導入することで得られる、一般化された和の母関数を構成し、それが満たす q -差分方程式についても考察した。Heine の変換公式の一般化である、多次元底つき超幾何級数に対する Euler 変換公式(Kajihara-Noumi の双対変換公式)を用いることで、上の結果をさらに一般化することに成功した。

(3) 積分 I_n の満たす parity result

(2) で導入した和の母関数の性質をさらに詳細に調べることを目標として、 I_n の満たす parity result について考察した。重さと深さの偶奇が異なる多重ゼータ値は、より低い深さの多重ゼータ値で表される。この性質は parity result と呼ばれる。Panzer により、parity result は、多重ポリログ関数の満たす関数関係式に一般化されている。

本研究では、parity result を積分 I_n にまで一般化することに成功した。三角極限 ($p \rightarrow 0$ の極限) や古典極限 ($q \rightarrow 1$ の極限) とすると、 q -多重ポリログ関数や楕円多重ポリログ関数の満たす parity result が得られる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

| | |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名 M. Kato | 4. 巻 24 |
| 2. 論文標題 Sums of Two-Parameter Deformations of Multiple Polylogarithms | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Mathematical Physics, Analysis and Geometry | 6. 最初と最後の頁 23 pp |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11040-021-09407-0 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 M. Kato and Y. Takeyama | 4. 巻 57 |
| 2. 論文標題 A deformation of multiple L-values | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 The Ramanujan Journal | 6. 最初と最後の頁 93-118 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11139-021-00441-8 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 KATO Masaki | 4. 巻 76 |
| 2. 論文標題 On q-analogues of zeta functions of root systems | 5. 発行年 2022年 |
| 3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics | 6. 最初と最後の頁 451 ~ 475 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.76.451 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Kato Masaki | 4. 巻 6 |
| 2. 論文標題 On certain two-parameter deformations of multiple zeta values | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Research in Number Theory | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40993-020-00205-1 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------|
| 1. 著者名 Kato Masaki | 4. 巻 - |
| 2. 論文標題 On q-analogues of zeta functions of root systems II | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics | 6. 最初と最後の頁 - |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計3件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件)

| |
|--|
| 1. 発表者名 加藤 正輝 |
| 2. 発表標題 Sums of two-parameter deformations of multiple polylogarithms |
| 3. 学会等名 日本数学会2021秋季総合分科会 |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 加藤 正輝 |
| 2. 発表標題 超幾何関数の2-パラメータ変形の満たす q -差分方程式について |
| 3. 学会等名 北陸数論セミナー (招待講演) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|------------------------------------|
| 1. 発表者名 加藤 正輝 |
| 2. 発表標題 ルート系のゼータ関数の q -類似について |
| 3. 学会等名 日本数学会年会2023年度年会 |
| 4. 発表年 2023年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|