

令和 6 年 6 月 21 日現在

機関番号：23901

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14294

研究課題名(和文)種々の多重ゼータ値の統一のおよび相互発展的な研究

研究課題名(英文)Unified and mutually evolving study of various multiple zeta values

研究代表者

田坂 浩二(Tasaka, Koji)

愛知県立大学・情報科学部・准教授

研究者番号：30780762

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,700,000円

研究成果の概要(和文)：数論の研究において、ゼータ関数の特殊値はさまざまな分野と関わる重要な研究対象である。本研究では、多変数化である多重ゼータ値について、有限多重ゼータ値やモジュラー形式との関係を解明する研究に関するいくつかの成果を得た。特に、さまざまな背景のもとに導入されている多重ゼータ値の亜種などにも適用可能な統一理論の開発では、解析的な対象である多重Eisenstein級数の基礎理論の構築や、 q 類似の高次合同式による一般化金子-Zagier予想への応用を見出した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今回の成果から、金子-Zagier予想は混合Tateモチーフの周期である数のクラスについても期待できる現象であることがわかり、金子-Zagier予想の真髄に一步近づくことができた。また、四半世紀未解決であるBroadhurst-Kreimer予想を部分的に解析できたことも今後につながる材料となりうる。こういった予想の解析から次の時代の数学がどんどん芽生えているという意味では、本研究の学術的意義は高い。

研究成果の概要(英文)：In the study of number theory, special values of zeta functions are an important subject of research involving various fields of mathematics and theoretical physics. In this study, we have obtained several results concerning the study of multiple zeta values, which are multivariable version of the Riemann zeta function, and their relationship with finite multiple zeta values and modular forms. In particular, in the development of a unified theory applicable to multiple zeta-valued variants and other variants introduced in various backgrounds, we have constructed a basic theory of multiple Eisenstein series and found applications to the generalized Kaneko-Zagier conjecture with supercongruences of q -analogue of multiple zeta values.

研究分野：整数論

キーワード：多重ゼータ値 有限多重ゼータ値 q 類似 モジュラー形式 多重Eisenstein級数 金子-Zagier予想 Broadhurst-Kreimer予想 多重モジュラー値

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の主役である多重ゼータ値は、1980 年台後半から量子群、場の量子論、結び目理論などの研究に現れ、徐々にその研究の重要性が認識され、整数論において近年活発に研究されている。本研究では、多重ゼータ値に関する次の三つの未解決問題の解明を目標に掲げた。

- (1) モジュラー形式との関係を示唆する Broadhurst-Kreimer 予想(1997)
- (2) 素数 p をわたる $\text{mod } p$ の列からなる環上の多重ゼータ値(有限多重ゼータ値)と実数である多重ゼータ値の関係を記述する金子-Zagier 予想(2013 +)
- (3) レベル付き多重ゼータ値がレベル付き混合モチーフの周期を生成するかという問題

これらは国内外で認知される重要な問題であるが、より強力な予想に帰着すれば解決できるという道筋を持つものもあれば、手がかりすらない問題もある。

2. 研究の目的

上述のような状況を打破すべく、新たなアプローチの開発や既存の結果・現象の整備・一般化を目的とした。特に、近年さまざまな背景のもとに導入されている多重ゼータ値の亜種などにも適用できるような、統一的な道具を開発する。具体的には、

- (1) 多重ゼータ値とモジュラー形式の情報を併せ持つ解析的な研究対象である、Gangl-金子-Zagier (2006)が定義した多重 Eisenstein 級数と Enriquez (2014)が導入した楕円多重ゼータ値の関係を明らかにすること、および、多重 Eisenstein 級数の理論を整備すること、
 - (2) Bachmann、竹山らと共同で開発した多重ゼータ値の q 類似を用いたアプローチを使って、さまざまな亜種に対する金子-Zagier 予想の類似を構築し、金子-Zagier 予想の本質を見極めること、
 - (3) レベル付き多重ゼータ値の代数的な基礎理論を整備すること、および、Brown による Eisenstein 級数の正規化反復積分値(多重モジュラー値)を使って混合モチーフの周期を作ること
- などである。

3. 研究の方法

基本的には、各々の対象を数式処理システムで計算する手法を考案し、各々の目的に沿って数値的な目処をつけていく。得られた観察から一般的な現象を見出し、関係式などの定式化、証明といった流れである。多重 Eisenstein 級数や q 類似の研究では、その証明手法に解析のツールを多く使う。次元の評価には混合 Tate モチーフの理論も援用する。K.T.Chen に端を発する反復積分論への非可換母関数の応用も活用する。

4. 研究成果

(1) 楕円多重ゼータ値と多重 Eisenstein 級数の関係については、素朴に違いを書き合うような公式は見いだせなかった。この方向性の研究そのものがいい題材ではない可能性がある。多重 Eisenstein 級数の代数構造については、北田(研究代表者の指導学生)の修士論文(2022)において部分的な結果が得られた。また、Brown (2012)による純奇多重ゼータ値予想(とある多重ゼータ値で生成されるベクトル空間の次元予想であって、多重ゼータ値の関係式とモジュラー形式の対応を示唆する予想)の部分的な解決(ただし、深さ次数化多重ゼータ環の構造に関する、Broadhurst-Kreimer 予想の精密化予想を仮定する)や、2重 Eisenstein 級数に関する次元および明示関係式に関する予想の定式化を行った。Broadhurst-Kreimer 予想の直接的な解明には至らなかったが、多重ゼータ値とモジュラー形式の関係に関する研究を深掘りするだけでなく、新たな方向性を提示する結果となった。

(2) 有限多重ゼータ値の研究では、共同開発した q 類似を援用する手法を飛躍させることができた。具体的には、Mordell-Torhheim 型の多重ゼータ値やレベル付き多重ゼータ値に適用することにより Kaneko-Zagier 予想の類似・拡張を定式化しており、また高次合同式への拡張(一般化 Kaneko-Zagier 予想)に適用可能な q 類似の理論を発展させている。Kaneko-Zagier 予想については、小森氏による Unified の理論を Mordell-Torhheim 型に拡張する方向性の研究も行った。派生して、代数的数の有限類似も考察し、素数の素イデアル分解法則への応用を見出した。多重ゼータ値に端を発する理論が古典的な数論の問題に応用できたことは意義深い。Langlands 対応を介して、重さ 1 のモジュラー形式にも応用がある。

(3) レベル N の多重ゼータ値の代数構造の基礎を整備した。特に、レベル N の多重ゼータ値を多重 L 値で表示する方法から得られる代数的な写像が、シャッフル積や調和積について準同型であることを見抜き、ここから自然に多重 L 値の正規化の概念をレベル N に翻訳できることがわかった。また、2重モジュラー値のプログラムを作成し、2重モジュラー値を多重ゼータ値およびモジュラー形式の L 関数の特殊値で表す明示公式を、広瀬氏(名古屋大学)とともに発見した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 TAKEYAMA Yoshihiro, TASAKA Koji	4. 巻 77
2. 論文標題 SUPERCONGRUENCES OF MULTIPLE HARMONIC q -SUMS AND GENERALIZED FINITE/SYMMETRIC MULTIPLE ZETA VALUES	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 75 ~ 120
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.77.75	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tasaka Koji	4. 巻 2267
2. 論文標題 Catalogue of modular relations for double zeta values	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS講究録	6. 最初と最後の頁 100 ~ 121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kadota Shin-ya, Okamoto Takuya, Ono Masataka, Tasaka Koji	4. 巻 62
2. 論文標題 On a unified double zeta function of Mordell-Tornheim type*	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Lithuanian Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 207 ~ 217
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10986-022-09556-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tasaka Koji	4. 巻 27
2. 論文標題 Finite and symmetric colored multiple zeta values and multiple harmonic q -series at roots of unity	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 21
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-021-00636-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 BACHMANN Henrik, TAKEYAMA Yoshihiro, TASAKA Koji	4. 巻 73
2. 論文標題 Finite and symmetric Mordell-Tornheim multiple zeta values	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1129 ~ 1158
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/84348434	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ma Ding, Tasaka Koji	4. 巻 242
2. 論文標題 Relationships between multiple zeta values of depths 2 and 3 and period polynomials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 359 ~ 400
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-021-2139-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Koji Tasaka	4. 巻 64
2. 論文標題 Note on totally odd multiple zeta values	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 63 ~ 73
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.18926/mjou/62796	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 多重ゼータの計算入門
3. 学会等名 Computing Multiple Zeta Seminar, Zoom (国際学会)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 「有限」代数的数からなる環の零因子について
3. 学会等名 愛知数論セミナー, 名古屋工業大学
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 Koji Tasaka
2. 発表標題 Spherical designs and modular forms of the D4 root lattice
3. 学会等名 RIMS conference ``Analytic and arithmetic aspects of automorphic representations", Kyoto University (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Koji Tasaka
2. 発表標題 Spherical designs and modular forms of the D4-lattice
3. 学会等名 Number Theory Lunch Seminar, Max Planck Institute for Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Koji Tasaka
2. 発表標題 From topics on explicit relations between multiple zeta values and modular forms
3. 学会等名 RIMS conference ``Zeta functions and their representations", Kyoto University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 Around double shuffle relations
3. 学会等名 第5回青葉山ゼータ研究集会, 東北大学 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 金子-Zagier予想の広がり
3. 学会等名 2021大分整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 有限代数的数について
3. 学会等名 九大多重ゼータセミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 いくつかの多重ゼータ値の有限q類似の話題から
3. 学会等名 第49回関西多重ゼータ研究会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 Supercongruences of q-analogues of multiple harmonic sums
3. 学会等名 Japan Europe Number Theory Exchange Seminar (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田坂浩二
2. 発表標題 Lehmer予想と球デザインに関する観察
3. 学会等名 早稲田整数論セミナー
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://www.math.kindai.ac.jp/laboratory/tasaka/ 田坂浩二のホームページ
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	Oxford University			