

令和 6 年 6 月 6 日現在

機関番号：32682

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14299

研究課題名（和文）可換環論：Cohen-Macaulay環の階層化問題

研究課題名（英文）Stratification of Cohen-Macaulay rings

研究代表者

遠藤 直樹（Endo, Naoki）

明治大学・政治経済学部・専任講師

研究者番号：30782510

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、「Cohen-Macaulay環の階層化問題」に対する一つの回答として、既存の almost Gorenstein環を Goto環という、より普遍的な方向への拡張を提案した。この背景には、almost Gorenstein環はその名の通り、非Gorenstein環の中でも限りなくGorenstein環に近い概念であり、またこれまでの解析結果から、非almost Gorenstein環の中にも優れた構造を持つ環が多数発見されている経緯がある。研究代表者は、Goto環論の将来的な関連分野への波及効果を意識しつつ、基礎理論の構築と共に豊富な具体例を提示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では「Cohen-Macaulay環の階層化問題」に対する回答として、Goto環の概念を提案した。Gorenstein環とCohen-Macaulay環は、現代可換環論を大きく飛躍させるに至った両翼であるにも関わらず、これら2つの環の差異の度合いに関しては、almost Gorenstein環を除き殆ど解析されていない。環の細分化という従来の願望に応えるという観点から、これら2つの環の間の階層化は重要な課題であり、関連分野の発展にとっても、Cohen-Macaulay環の魅力的で発展性のある新しいクラスが提示され、解析されることの意義は少なくないと判断される。

研究成果の概要（英文）：In this research, we proposed the notion of Goto rings as a generalization of almost Gorenstein rings. The background to this is that almost Gorenstein rings, as the name suggests, are a concept that is as close as possible to Gorenstein rings among non-Gorenstein rings. From the preceding researches so far, we encountered non-almost Gorenstein rings, but some of which still have good structures. Thus, time has come to generalize almost Gorenstein rings. We constructed and developed a basic theory of Goto rings and provided a wealth of concrete examples, keeping in mind the ripple effect of the theory on related fields in the future.

研究分野：可換環論

キーワード：Goto環 Cohen-Macaulay環 Gorenstein環 正準イデアル Sally加群

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の主題は可換環論である。現代可換環論の研究領域は多岐に渡るが、本研究では「Cohen-Macaulay 環の階層化問題」に従事する。つまり、可換環論の中でも最重要の研究対象である Cohen-Macaulay 環に対して、新たな環のクラスを提示し、Gorenstein 性との差異を指標とした階層化を通して、可換環論に新たな展望を齎すことを目標とする。

Cohen-Macaulay 環は現代可換環論の主役であり、代数幾何学、特異点論、不変式論、組合せ論などあらゆる処に見出されている。H. Bass によって創始された Gorenstein 環論は、J. Herzog-E. Kunz により正準加群の理論として書き直され、現代可換環論の礎を築いた。Gorenstein 環は対称性を備えた Cohen-Macaulay 環であり、様々な場面に登場し、その対称性故に重要な役割を果たす。一方で、Cohen-Macaulay 環解析の際に出会う環は Gorenstein でないことが多く、率直に何故 Gorenstein でない Cohen-Macaulay 環が多様かつ豊富に存在するのか、という素朴な疑問に捕われる。Gorenstein 環と Cohen-Macaulay 環は、現代可換環論を大きく飛躍させるに至った両翼であるにも関わらず、これら 2 つの環の差異の度合いは殆ど解析されていない。つまり、「Cohen-Macaulay 環の階層化問題」への第一歩として取り組むべき課題は、「Gorenstein 環とは限らないが、Gorenstein 環に次いで優れた構造を持つ Cohen-Macaulay 環とは如何なる存在である(べき)か」という視点からの環構造解析とそれに基づく新分野の開拓であり、2015 年に研究代表者と後藤四郎、高橋亮が提示した almost Gorenstein 環は、この問いに応え得る候補である。

一方、約 10 年間に亘るこれまでの解析結果から、almost Gorenstein 環はその名の通り、非 Gorenstein 環の中でも限りなく Gorenstein 環に近い概念であると判断される。実際、almost Gorenstein 環でない例も数多く存在する。Almost Gorenstein 環論は、関連分野への応用を含め、魅力的で発展性のある環のクラスであると自負しているが、今、当初の目標である「Cohen-Macaulay 環の階層化問題」に立ち返るとき、階層化という視点から考察するならば、もはや almost Gorenstein 環論だけでは不十分であると言わざるを得ない。我々は、次の段階に進むべき時が来ている。つまり、almost Gorenstein 環論を批判的に検討し、almost Gorenstein 環論の持つ問題点(或いは弱点)を掌握する。その上で、理論を真に飛躍させるための拡張が求められていると判断すべきである。

2. 研究の目的

本研究において、研究代表者は既存の almost Gorenstein 環を n -Goto 環という、より普遍的な方向へ深化・発展させる。非負整数 n に対して定義される n -Goto 環は、 $n=0$ の場合に Gorenstein 環、 $n=1$ の場合に almost Gorenstein 環となるよう構成されており、整数 n の値が大きくなるにつれて Gorenstein 環から遠ざかり、Cohen-Macaulay 環に近づくものである。本研究では、将来的に関連分野への応用と浸透を図ることを念頭に置きながら、Goto 環の基礎理論の構築と共に、豊富な具体例の提示を目的とする。

3. 研究の方法

本研究では古典的なイデアル論的手法を駆使しながら環の内部構造解析を試みる。イデアル論の立場から見ると、高次元の Cohen-Macaulay 環論は、謂わば 1 次元 Noether 整域の理論の高次元版であって、1 次元の環に対して成立する端麗で特徴的な現象を正則列の概念を基盤に homology 代数を武器として高次元に拡張したものと捉えることができる。従って、Goto 環論においても 1 次元の精密な理論構築を出発点に研究を進める。本研究においては、具体的課題を下記のように設定し、与えられた 4 年間で成果を挙げることを目指すものである。

課題(1) 1次元 n -Goto 環の基礎理論構築

課題(2) 正準イデアルに関する Sally 加群の構造解析

課題(3) 高次元 n -Goto 環の基礎理論構築

4. 研究成果

課題(1)では、正準イデアルを持つ 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環と非負整数 n に対して、1 次元 n -Goto 環の概念を導入した。端的には、1 次元 n -Goto 環 R とは、正準イデアル I の巴系イデアル Q に関する節減数が 2 (以下) であって、 R -加群 I^2/QI の長さが n であることにより定義される。研究代表者は、まず定義の有効性と妥当性を確認する為に、既存の Gorenstein 環や almost Gorenstein 環に対して成立する結果の n -Goto 性への拡張可能性を検証した。具体的な成果として、イデアル化(或いは自明な拡大)やファイバー積を用いた n -Goto 環の構成法を提示し、基礎環の n -Goto 性を極大イデアルに関する blow-up 代数の n -Goto 性により記述した。

加えて、Herzog 行列を用いて、体上の 3 元生成数値半群環の n -Goto 性の特徴付けを与えた。この結果を鑑み、より一般に n -Goto 環の極小自由分解による構造定理を発見し、その帰結の一つとして、正準イデアルの節減数が 2 (以下) であるような数値半群環の定義イデアルの生成系を全て書き出すことにも成功した。

課題(2)では、 n -Goto 環の高次元化への準備として、正準イデアルの Sally 加群の構造を解析した。Sally 加群は、1994 年に W. V. Vasconcelos により、Hilbert 函数の補正項を記述するような次数付加群として導入された概念である。研究代表者は、Sally 加群を考える際、正準イデアルの高さが 1 である点が障壁になり得ると判断し、高さが基礎環の Krull 次元に一致するような正準イデアルとして、拡大正準イデアルの概念を導入し、その Sally 加群を考察した。局所平坦射や特殊な正則列 (super-regular sequences) による剰余といった環の基本操作と Sally 加群の関連性についての結果が得られた。

課題(3)では、課題(1)と課題(2)の解析結果を踏まえ、拡大正準イデアルの Sally 加群の構造を用いて、高次元 n -Goto 環の概念を導入した。研究代表者は体上の行列式環やイデアル化、ファイバー積を用いた高次元 n -Goto 環の構成法を提示した。加えて、拡大正準イデアルの Sally 加群による n -Goto 性の特徴付けの帰結として、Gorenstein 環や almost Gorenstein 環に対する新たな特徴付けも得られた。

その他、研究代表者は本研究課題と不可分に関連する Arf 環の解析も行った。Arf 環は 1971 年に J. Lipman により導入された概念であり、環の基本操作との相性も良く、数多くの具体例を構成することが可能であるが、その重要性の最たるものは、環の strict closed 性に関する O. Zariski の予想にある。Zariski は環が Arf であることと strictly closed であることが同値であると予想し、Arf 性が strict closed 性の必要条件であることを示した。十分条件に関しては、基礎環が体を含む場合に成立することを Lipman が示していたが、研究代表者は、本研究を進める中で、Zariski 予想が一般に正しいことの証明に約 50 年越しに成功した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Endo Naoki and Goto Shiro	4. 巻 228
2. 論文標題 Reflexive modules over the endomorphism algebras of reflexive trace ideals	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 107662
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2024.107662	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Endo, Shiro Goto, Shin-ichiro Iai, and Naoyuki Matsuoka	4. 巻 34
2. 論文標題 Ulrich ideals in the ring $k[[t^5, t^{11}]]$	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 International Journal of Algebra and Computation	6. 最初と最後の頁 351-369
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218196724500127	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Endo, Laura Ghezzi, Shiro Goto, Jooyoun Hong, Shin-ichiro Iai, Toshinori Kobayashi, Naoyuki Matsuoka, and Ryo Takahashi	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Rings with q -torsionfree canonical modules	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 The Mathematical Legacy of Wolmer V. Vasconcelos, De Gruyter Proceedings in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoki Endo and Naoyuki Matsuoka	4. 巻 52
2. 論文標題 Remarks on almost Gorenstein rings	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 2884-2891
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2024.2310163	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Endo, Shiro Goto, Shin-ichiro Iai, and Naoyuki Matsuoka	4. 巻 15
2. 論文標題 On the weakly Arf (S2)-ifications of Noetherian rings	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 303-319
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1216/jca.2023.15.303	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ela Celikbas, Olgur Celikbas, Catalin Ciuperca, Naoki Endo, Shiro Goto, Ryotaro Isobe, and Naoyuki Matsuoka	4. 巻 15
2. 論文標題 On the ubiquity of Arf rings	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 177-231
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1216/jca.2023.15.177	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoki Endo, Shiro Goto, and Ryotaro Isobe	4. 巻 8
2. 論文標題 Topics on strict closure of rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Research in the Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 Paper No.55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40687-021-00292-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Endo, Shiro Goto, Shin-ichiro Iai, and Naoyuki Matsuoka	4. 巻 51
2. 論文標題 When are the rings $l:l$ Gorenstein?	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 1721-1734
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2022.2141764	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ela Celikbas, Naoki Endo, Jai Laxmi, and Jerzy Weyman	4. 巻 50
2. 論文標題 Almost Gorenstein determinantal rings of symmetric matrices	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 5449-5458
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2022.2086260	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoki Endo and Shiro Goto	4. 巻 611
2. 論文標題 Ulrich ideals in numerical semigroup rings of small multiplicity	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 435-479
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2022.08.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Endo Naoki, Goto Shiro, and Isobe Ryotaro	4. 巻 64
2. 論文標題 Almost Gorenstein rings arising from fiber products	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 383-400
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4153/S000843952000051X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Endo Naoki and Goto Shiro	4. 巻 150
2. 論文標題 Construction of strictly closed rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 119-129
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/15659	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Olgur Celikbas, Arash Sadeghi, and Naoki Taniguchi	4. 巻 23
2. 論文標題 On modules with reducible complexity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 1467-1476
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10468-019-09899-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kazuma Shimomoto, Naoki Taniguchi, and Ehsan Tavanfar	4. 巻 562
2. 論文標題 A study of quasi-Gorenstein rings II: Deformation of quasi-Gorenstein property	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 368-389
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.06.032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計19件 (うち招待講演 10件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 遠藤 直樹
2. 発表標題 Sally modules of extended canonical ideals and Goto rings
3. 学会等名 日本数学会2024年度年会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 遠藤 直樹
2. 発表標題 Graded ideals whose quotient rings are Gorenstein
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 遠藤 直樹
2. 発表標題 Ideals whose quotient rings are Gorenstein
3. 学会等名 第34回可換環論セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 Ulrich ideals and numerical semigroup rings
3. 学会等名 INdAM workshop: International meeting on numerical semigroups - Roma 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 遠藤 直樹
2. 発表標題 Ulrich ideals in numerical semigroup rings
3. 学会等名 第33回可換環論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 遠藤 直樹, 後藤 四郎
2. 発表標題 Reflexive modules over the endomorphism algebras of reflexive trace ideals
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ela Celikbas, Naoki Endo, Jai Laxmi, and Jerzy Weyman
2. 発表標題 Almost Gorenstein Determinantal Rings of Symmetric Matrices
3. 学会等名 AMS Fall Southeastern Sectional Meeting, Special Session on Combinatorial Commutative Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Naoki Endo and Shiro Goto
2. 発表標題 Reflexive modules over the endomorphism algebras of reflexive trace ideals
3. 学会等名 The 43rd Japan Symposium on Commutative Algebra (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 遠藤 直樹
2. 発表標題 The category of reflexive modules over one-dimensional Cohen-Macaulay rings
3. 学会等名 東京可換環論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 遠藤 直樹
2. 発表標題 On the stratification of one-dimensional Cohen-Macaulay rings
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 Generalization of Gorenstein rings -from the past to the future-
3. 学会等名 The 11th Japan-Vietnam Joint seminar on Commutative Algebra, by and for young mathematicians (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 遠藤 直樹
2. 発表標題 The Gorensteinness of the endomorphism rings of ideals
3. 学会等名 特異点論月曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 When are the endomorphism rings of ideals Gorenstein?
3. 学会等名 Commutative Algebra and Algebraic Geometry Seminar at the City University of New York (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 Ulrich ideals with smallest number of generators
3. 学会等名 The 42nd Symposium on Commutative Algebra (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 遠藤 直樹
2. 発表標題 Cohen-Macaulay環の階層化問題
3. 学会等名 神楽坂代数セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 遠藤 直樹
2. 発表標題 Strict closure of rings
3. 学会等名 東京可換環論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 遠藤直樹
2. 発表標題 Arf closure versus strict closure
3. 学会等名 可換環論オンラインワークショップ
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 Weakly Arf rings
3. 学会等名 AMS Fall Eastern Virtual Sectional Meeting, Special Session on Homological Methods in Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Naoki Endo
2. 発表標題 On weakly Arf rings
3. 学会等名 AMS Spring Central Sectional Meeting, Special Session on Commutative Algebra and Connections with Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Naoki Endoのweb page https://www.isc.meiji.ac.jp/~endo/
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 11th Japan-Vietnam Joint seminar on Commutative Algebra, by and for young mathematicians	開催年 2023年～2023年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
				他1機関
米国	West Virginia University	North Dakota State University	The City University of New York	
インド	Tata Institute of Fundamental Research			
ポーランド	Jagiellonian University			