

令和 6 年 9 月 5 日現在

機関番号：94305

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14300

研究課題名（和文）代数・数論力学系とDiophantus幾何学の周辺の研究

研究課題名（英文）Algebraic and arithmetic dynamics, Diophantine Geometry, and related topics

研究代表者

佐野 薫 (Sano, Kaoru)

日本電信電話株式会社NTTコミュニケーション科学基礎研究所・メディア情報研究部・研究員

研究者番号：60867563

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：数論力学系の分野に属する研究を行った。数論的に重要な関数である高さ関数の漸近挙動（=算術次数）についての川口Silverman予想に主な問題意識を持ち、最大算術次数を持つ点の稠密性に関する研究を行った。また、川口Silverman予想から派生して考えられる問題群（前軌道問題や力学系的消去、固定した点の逆像の有理点の問題）や、高さ関数そのものの性質（無限次代数拡大体の一般化したWeil高さについてのNorthcott数）、また、力学系分野で重要視されている放物型周期点をもつパラメータに関する数論的な性質を調べる研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多項式や有理写像が与えられたとき、その反復合成を考えることで力学系が得られる。この力学系について、高さ関数の漸近挙動を表す量である算術次数は数論的な量である。一方で力学系自体の幾何的な複雑さを表す力学系次数という量がある。川口Silverman予想は、幾何的に十分複雑な軌道を持つ点の算術次数が力学系次数に一致する、という予想であり、数論と幾何との密接な繋がりを示している。本研究課題の研究成果はいずれも、数論、幾何、力学系の基礎的な研究であり、川口-Silverman予想をはじめとする数論的力学系分野の応用が見込まれる。

研究成果の概要（英文）：The researcher worked on the field of arithmetic of dynamics.

Kawaguchi-Silverman conjecture asserts that the arithmetic degree of Zariski dense orbit is equal to the dynamical degree, where the arithmetic degree is an arithmetic quantity of the orbit, and the dynamical degree is a geometric quantity of the dynamics. In the papers which he wrote, he studied some problems related to Kawaguchi-Silverman conjecture (e.g. Zariski density of maximal arithmetic degree, dynamical cancellation, and the preimages question). He also studied the property of the height functions itself, and the arithmetic properties of the parabolic parameters which are important parameters in the field of dynamical systems. All of these researches are fundamental researches of the arithmetic dynamics.

研究分野：数論的力学系

キーワード：Diophantus幾何学 高さ関数 算術次数 前軌道問題 放物型パラメータ ノースcott数

## 1. 研究開始当初の背景

数論力学系の分野において、代数多様体の自己射の反復合成による有理点の軌道がよく調べられている。特に有理点の高さの漸近挙動に関する川口-Silverman 予想は本研究を始める以前からの中心的な話題であり、様々なクラスの高次元多様体とその自己射に対して証明することが期待されていた。当時川口-Silverman 予想が証明されていたのはアーベル多様体・代数的トーラス・準アーベル多様体・射影曲面の自己全射でほぼ尽きており、結果をいかにして拡張していくかが重要視されていた。

## 2. 研究の目的

川口-Silverman 予想をモチベーションの中心に据えて、高さ関数の基本的な性質および、代数多様体の自己射の反復合成に関する数論的な現象を明らかにすることを目的とした。具体的には、当時ほとんど手つかずであったアフィン空間の力学系に対する川口-Silverman 予想に取り組むことを目的としていた。このために、Vojta 予想や abc 予想 (定理) といった数論の大予想と川口-Silverman 予想との関連を探ることを当初の目的としていた。

## 3. 研究の方法

極小モデルプログラムの活用を中心とした代数幾何的な考察・素点を固定したときの局所体上の解析・具体的な高さの計算・基本的な代数学の道具立てを複合的に用いて研究を行った。

## 4. 研究成果

アフィン空間の力学系を調べることが想定していた以上に困難であったため方針の転換を行い、代数多様体の自己射の反復合成の力学系に関連する数論的な問題をより広く研究した。

川口-Silverman 予想で問われている、算術次数が力学系次数より真に小さな点がある意味で非常に少ないことを主張する結果及び予想が 2020 年 2 月に松澤-Meng-柴田-Zhang の共同研究により発表された。補集合に注目するとこの予想は、算術次数が力学系次数に一致するような点が非常に豊富に存在することを意味しており、このことを一般に有理数体の代数閉包上で柴田崇広氏との共同研究により証明した。同様のことは点の定義体を固定した代数体に制限しても成り立つことが予想され、曲面の自己射やアーベル多様体など、有理点を豊富に持つ場合に解決した。これらの結果は 2 本の論文 “Zariski density of points with maximal arithmetic degree” *Michigan Mathematical Journal* 73 (2) 429-448. 及び “Zariski density of points with maximal arithmetic degree for surfaces” (*RIMS Kôkyûroku Bessatsu* より出版予定) で発表した。

前述の松澤-Meng-柴田-Zhang の論文で、自己射に関して不変な部分多様体の前軌道にどの程度新たな有理点が現れるかを問う問題が提示されている。この問題は前軌道問題と呼ばれ、川口-Silverman 予想にも深く関わっている。松澤陽介氏との共同研究により、前軌道問題を射影直線の直積の場合に証明し、その一様バージョンをアーベル多様体の場合に証明した。また、前軌道問題の一般的な考察をまとめ、有理点の定義体の拡大を許すバージョンと許さないバージョンの同値性などを証明した。これらの結果は “On Preimages Question” で発表し、国際誌に投稿中である。前軌道問題についての考察の中で現れる曲面の特異点は 0 の反復逆像であることが示せる。この特異点を調べるため、2 次多項式による 0 の反復逆像を調べ、Poonen 氏との議論により進展することができた。本研究課題の期間中に論文を完成させることはできなかったが、執筆中である。

代数多様体の自己射の力学系における有理点の振る舞いを調べるうえでは、上記のように高さ関数は基本的な道具である。また、基礎体の代数体は固定して考えるのが標準的であるが、無限次拡大体 (例えば有理数体上の最大アーベル拡大など) の上での現象にも数論的には興味がある。そこで、無限次代数拡大体の元の高さの下限 (Northcott 数) の分布に関して Vidaux-Videla により立てられた問題を岡崎勝男氏との共同研究で解決した。さらに行列環の Northcott 数に拡張した結果を得ており、数論力学系への応用が見込まれている。これらの結果は 2 本の論文 “Northcott numbers for the weighted Weil heights” *Rendiconti Lincei, Matematica e Applicazioni* 34(1) 127-144 及び “Northcott numbers for generalized weighted Weil heights” (*Acta Arithmetica* より出版予定) にて発表した。

数論力学系分野の中心的な話題の一つである Morton-Silverman 予想は、代数体上で定義された有理写像について、その擬周期有理点の個数が、基礎体の代数体の次数・有理写像の次数・空間の次元のみに依存する定数で抑えられることを主張する予想である。松澤-Meng-柴田-Zhang の予想が有理写像に対しても正しければ Morton-Silverman 予想が解決されることが知

られているという意味で、川口-Silverman 予想とも関連する。基礎体を有理数体に、考える対象を射影直線の 2 次多項式写像に制限しても Morton-Silverman 予想は未解決であり、周期が 4, 5, 6 の有理周期点をもつ 2 次多項式の非存在が (周期 6 の場合には BSD 予想の仮定のもと) 知られているのみであった。そこで、考える周期点に力学系的に重要な条件を課して調べたところ、2 次多項式の力学系における放物型パラメータの 4 倍が代数的整数であることが証明でき、放物型パラメータのうち有理数体上 2 次の代数的整数であるようなものを完全に決定した。この結果については論文 “Arithmetic properties of multiplier polynomials for certain polynomial maps” で発表し、雑誌投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Sano Kaoru, Shibata Takahiro	4. 巻 73(2)
2. 論文標題 Zariski Density of Points with Maximal Arithmetic Degree	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Michigan Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1--20
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1307/mmj/20205960	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sano Kaoru	4. 巻 72(1)
2. 論文標題 Dynamical degree and arithmetic degree of endomorphisms on product varieties	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1--13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj/1585101618	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Okazaki Masao, Sano Kaoru	4. 巻 34 no. 1
2. 論文標題 Northcott numbers for the weighted Weil heights	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Rendiconti Lincei, Matematica e Applicazioni	6. 最初と最後の頁 127--144
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/RLM/1000	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 7件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 佐野薫
2. 発表標題 重み付きWeil高さに関するNorthcott数
3. 学会等名 九大代数学セミナー（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野 薫
2. 発表標題 Northcott numbers for weighted Weil heights
3. 学会等名 数論・力学系若手研究集会 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野 薫
2. 発表標題 重み付きWeil高さに対するNorthcott数
3. 学会等名 Diophantine Analysis and Related Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐野 薫
2. 発表標題 高さ関数の漸近挙動とその一様誤差について
3. 学会等名 愛媛大学代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kaoru Sano
2. 発表標題 On the polynomials related with the uniformity of dynamical cancellation of self-morphisms on the projective line
3. 学会等名 RIMS Workshop "Aspects of Complex Dynamics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐野 薫
2. 発表標題 最大算術次数を持つ点のZariski 稠密性
3. 学会等名 Friday Tea Time Zoom Seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐野 薫
2. 発表標題 最大算術次数を持つ点のZariski稠密性
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐野 薫
2. 発表標題 最大算術次数を持つ点のZariski稠密性
3. 学会等名 2020年度多変数関数論冬セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kaoru Sano
2. 発表標題 Zariski density of rational points with the maximal arithmetic degree
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings, AMS Special Session on Current Trends in Arithmetic Dynamics, I (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

本研究課題の期間中の研究について、雑誌掲載予定論文2本、執筆済み雑誌投稿中論文2本。

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	臼杵 峻亮  (Usuki Shunsuke)	京都大学大学院・理学研究科  (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 数論・力学系若手研究集会	開催年 2022年～2022年
------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------