様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １５ 日現在

機関番号：１２６０１

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：２０Ｋ１４３０５

研究課題名（和文）複素球多様体に対する可視的作用とその表現の分規則への応用

研究課題名（英文）Visible Actions on Complex Spherical Varieties and Applications to Branching Rules of Group Representations

研究代表者

田中　雄一郎（Tanaka, Yuichiro）

東京大学・大学院数理科学研究科・助教

研究者番号：７０７８００６３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：群の線型空間への線型な作用を表現といい、その構成要素に重複が起こらない表現は無重複であるといいます。Lie群の表現の無重複性を統一的に扱うことを目的として、複素多様体に対する可視的な作用の理論が東京大学の小林俊行教授によって導入されました。本研究により、コンパクトLie群の可視的作用から非コンパクトLie群のそれが得られることが分かり、さらに、作用の可視性から楕円型軌道上の線束のDolbeaultコホモロジー空間の無重複性が従うことが分かりました。特に後者の結果により、小林氏が10年以上前に提示していた問題を肯定的に解決したことになります。

研究成果の学術的意義や社会的意義

群の線型空間への線型な作用を表現といいます。Lie群の表現の無重複性を統一的に扱うことを目的として、複素多様体に対する可視的な作用の理論が小林俊行氏によって導入されました。本研究により、コンパクトLie群の可視的作用から非コンパクトLie群のそれが得られることが分かり、さらに、群作用の可視性から楕円型軌道上の同変正則線束のDolbeaultコホモロジー空間の無重複性が従うことが分かりました。特に後者の結果は、小林氏が10年以上前に提示していた問題を肯定的に解決しています。

研究成果の概要（英文）：A representation is a linear action of a group on a vector space, and it is multiplicity-free if any constituent appears at most once in its irreducible decomposition. With the aim of uniform treatment of multiplicity-free representations of Lie groups, T. Kobayashi introduced the theory of visible actions on complex manifolds. This research shows that the visibility of actions of compact Lie groups implies that of non-compact Lie groups, and further, that the visibility implies the multiplicity-freeness of the Dolbeault cohomology space of a line bundle on an elliptic orbit.

研究分野：表現論

キーワード：Lie群　可視的作用　無重複表現　コホモロジー

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

群の線型空間への線型作用を群の表現という。特に、その各既約成分に重複がないときは、無重複表現と呼ばれる。この無重複という性質は様々な形で現れ、研究されている。

無重複表現はその多様性に相俟って、研究手法も個性的である。この状況を受け、小林俊行氏は複素多様体に対する可視的な作用の理論([Kobayashi, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005)]) を導入し、無重複表現の統一的研究を開始した。実際、小林氏の無重複性の伝播定理（[Kobayashi, Progr. Math., **306**, 2013]）は、散在的に扱われていた多くの表現に対し、その無重複性に対する統一的な説明を与えることができる。さらに、それまで知られていなかった新しい無重複定理の発見も可能とする。

無重複性の伝播定理によれば、Lie 群が複素多様体に強可視的に作用すれば、正則関数の空間は無重複である。すると自然にその逆、即ち、「正則関数の空間が無重複ならば、群作用は可視的か？」という問いが浮かぶ。今、Gc を複素簡約代数群、X を Gc-多様体、G を Gc のコンパクト実形として、G の X への作用を考える。この設定において、以下の各場合に問い「無重複ならば可視的か？」に対する肯定的結果が知られていた。

1. X が複素対称空間であるとき（小林氏[Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005)]）
2. X が複素冪零軌道であるとき（小林氏[Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005)]、笹木集夢氏[J. Lie Theory 26 (2016)]）
3. X が A 型一般旗多様体であるとき（小林氏[J. Math. Soc. Japan **59** (2007)]）
4. X が無重複線型空間であるとき（笹木氏[Int. Math. Res. Not. (2009), (2011)]）
5. X がある複素球等質空間であるとき（笹木氏[Geom. Dedicata **145** (2010), J. Math. Sci. Univ. Tokyo 17 (2010), Adv. Pure Appl. Math. **2** (2011)]）

本研究代表者はこれまでの研究で、一般の X に対しこの問いを肯定的に解決した。よって、群がコンパクトで空間が代数的であるときは、無重複ならば強可視的である、ということができる。

２．研究の目的

これまでの研究でコンパクト実形の作用の可視性に決着が付いたため、さらなる発展をさせるべく、本研究では非コンパクトの場合に作用の可視性を調べることと、これを表現の分規則に応用することの 2 つを目的とした。より具体的に、以下の 2 つの問題を掲げた。

【問題 1】

「連結複素簡約代数群 Gc が複素代数多様体 X に作用しているとする。いま、任意の Gc-同変な X 上の線束 L に対し、その大域切断の空間 O[X,L]が Gc の表現として無重複であると仮定する。このとき、Gc の非コンパクトな実形 G は X に強可視的に作用するか？」

ただし、G が X に強可視的に作用するとは、X のある実部分多様体 S が存在して、S を通る G 軌道全体 G・S が X の空でない開集合となり、G・S 上のある反正則微分同相写像 σ が存在して各 G 軌道を保ち、σ が S に恒等写像として作用すること、を言う。

【問題２】

「G を実半単純 Lie 群、Z を Lie 環の楕円元とし、L を Z の固定化部分群とする。楕円軌道 G/L に G の閉部分群 H が強可視的に作用するときに、G/L の同変正則線束の Dolbeault コホモロジーの空間に実現される G のユニタリ表現は H の表現として無重複となるか？」

３．研究の方法

【問題１に関する先行研究における手法】

(A).小林氏[Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005)] が導入した可視的作用の誘導法。

(B).小林氏[J. Math. Soc. Japan 59 (2007)] が導入した編み上げの手法。

【問題１に関する先行研究の手法の障害】

本研究では手法(A),(B)を一般の設定で用いたい。そこで障害となるのが「先行研究では分類を用い各論によって証明された」という点である。一般の設定での分類は未知であるため、以下の A), B)のように手法を拡張する。

【問題１に対する本研究における手法】

A) Weisfeiler 氏の結果[B. Weisfeiler, Uspehi Mat. Nauk **21** 1966 no. 2 (128)] を用いて、一般の等質空間に対する作用の可視性の問題を、Levi 部分群による滑らかなアファイン代数多様体に対するそれへと帰着させる。これは(A)の拡張になっている。

B) 群の次元に関する帰納法を用いることで、両側剰余類の問題を対称部分群に関するそれへと帰着させる。これは(B)の拡張になっている。

【問題２に関する先行研究における手法】
複素多様体上の正則関数の空間内の Hilbert 空間に付随する再生核を用いる手法（[Kobayashi, Progr. Math., 306, 2013]）
【問題２に関する先行研究の手法の障害】
再生核を構成するためには「関数の値」が定義できることが必要である。そのため、本研究の対象である Dolbeault コホモロジーのような値が定まらない対象には適用できない。
【問題２に対する本研究における手法】
コホモロジーに対しても「関数の値」を考えるために、良い代表元を構成する。具体的には、Schmid 氏と Wong 氏の研究(W. Schmid, Dissertation, University of California, Berkeley, CA, 1967、H. Wong, Thesis (Ph.D), Harvard University. 1992)にならい、G/L の s 次元のコンパクト複素部分多様体の滑らかな族から(double) fibration を考え、$\bar{\partial}$方程式を s 回解いて閉形式を得る。ただし、s は G/L 上の G の極大コンパクト部分群 K による軌道の次元である。

４．研究成果

(1) 初年度に実施した研究によって、コンパクト Lie 群による強可視的作用から非コンパクト Lie 群による強可視的作用を構成する方法を得た。G を連結コンパクト Lie 群とし、H 及び L をその Levi 部分群とする。このとき、H による一般旗多様体 G/L への作用が強可視的となるような 3 つ組(G,H,L)を分類せよ、という問題が小林俊行氏によって提示され、実際に G が A 型である場合における解が与えられた（[Kobayashi, J. Math. Soc. Japan 59(2007)]）。その後、論文[Tanaka, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 88(6) (2012)]において他の型の場合に対する解が示されてる。初年度の研究を通し、上述の分類されたコンパクト Lie 群の 3 つ組から、G の複素化 Gc の非コンパクト実形 G'およびその 2 つの Levi 部分群 H'と L'からなる 3 つ組を構成したときに、非コンパクト Lie 群による楕円軌道への強可視的作用が得られること、すなわち、可視的作用のスライスおよび反正則微分同相写像が得られることが分かった。さらに、このときに用いた議論を吟味することによって、2 つの部分群 H',L'の内の片方が Levi 部分群でない場合であっても、(G',H')と(G',L')が対称対であってかつ H'と L'の共通部分が G'のコンパクト部分最大の Cartan 部分群を含む、という仮定の下で可視的作用が得られることがわかった。
(2) 可視的作用の分類問題について、まずコンパクト Lie 群の作用については、ユニタリ群の一般旗多様体への Levi 部分群による作用、ユニタリ群の線型空間への線型作用および A 型複素冪零軌道への作用に対して、小林氏によって分類が与えられた。その後、一般の線型空間への線型作用と複素冪零軌道への作用とに対して、笹木集夢氏によって分類が与えられた。また、非コンパクト Lie 群の作用については、これまでに Hermite 対称空間への対称部分群による作用が強可視的であることが小林氏によって証明されている。2 年目の研究で、コンパクト実形による作用の強可視性から非コンパクト実形による作用のそれが得られることが分かった。手法は、コンパクト実形による可視的作用を作用している空間ごとすべて複素化した後に、非コンパクト実形に制限するというものである。
(3) Lie 群の既約表現に対し、その（複素）幾何的な実現を与える研究は、コンパクト Lie 群に対する Borel-Weil の理論にはじまる。おおまかに、この定理は任意の既約ユニタリ表現が複素旗多様体という等質空間上の正則線束の切断の空間として実現できる、というものである。より一般の設定として、（コンパクトとは限らない）Lie 群による複素多様体上の Hermite 正則ベクトル束への正則な作用を考えるとき、底空間への作用が推移的（底空間が等質空間となる）でありかつ各点における固定化部分群によるファイバーへの作用が既約であれば、ベクトル束の正則切断の空間に実現されるユニタリ表現は既約である、ということが小林昭七先生によって証明された。3 年目の研究によって、切断の空間だけでなくより高次のコホモロジーの空間に実現されるユニタリ表現に対しても、その既約性を得るのに本研究の手法が有効であるということが分かった。
(4) 最終年度の研究で、可視的作用のもとで楕円軌道上の正則線束の Dolbeault コホモロジーの空間が無重複となることを示した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 TANAKA Yuichiro	４．巻 74
２．論文標題 A Cartan decomposition for Gelfand pairs and induction of spherical functions	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	６．最初と最後の頁 1219～1243
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/85588558	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 TANAKA Yuichiro	４．巻 366
２．論文標題 On Double Coset Decompositions of Real Reductive Groups for Reductive Absolutely Spherical Subgroups	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications . TJC 2019. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	６．最初と最後の頁 229～267
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-78346-4_14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 TANAKA Yuichiro	４．巻 -
２．論文標題 A note on multiplicity-freeness property of cohomology spaces	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Symmetry in Geometry and Analysis--Festschrift for Toshiyuki Kobayashi	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 田中雄一郎
２．発表標題 無重複性のユニタリトリックについて
３．学会等名 日本数学会2023年度年会
４．発表年 2023年

1．発表者名 田中雄一郎
2．発表標題 無重複性のユニタリトリックについて
3．学会等名 Lie群論・表現論セミナー
4．発表年 2022年

1．発表者名 Yuichiro Tanaka
2．発表標題 On the multiplicity- freeness property of cohomology spaces
3．学会等名 7th Tunisian-Japanese Conference（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関