

令和 6 年 6 月 25 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14307

研究課題名（和文）指数・スペクトルの局所化と非可換幾何学の新展開

研究課題名（英文）New developments in localization principles in differential geometry and noncommutative geometry

研究代表者

山下 真由子（Yamashita, Mayuko）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：30866249

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：当初は微分幾何学・微分トポロジーに関わる純粋数学的な研究を計画していたが、それにとどまらず代数トポロジーやホモトピー論にも研究内容を広げることで、理論物理学とも深い関係があることが判明し、課題期間の後半では物理学者を含めた共同研究を主とするに至った。研究期間全体を通して、トポロジカルモジュラー形式およびSegal-Stolz-Teichner予想という、ホモトピー論と物理学を結びつける深いトピックの研究に踏み込み、数学・物理双方にさまざまな研究成果を出すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数トポロジーやホモトピー論は抽象化が進んだ結果、純粋数学的には面白いものであってもごく最近までは理論物理学への還元がほとんどなされてこなかったといえる。しかし本研究はホモトピー論の深い結果を理論物理学に実際に応用した先駆的な研究と言える。例えば本研究で構築した量子異常の分類に関する一般論は、量子異常の解析やトポロジカル物性における相の分類に応用されている。また、量子異常の消滅を示した結果は理論物理学から大きな反響があった。それに続く研究も進んでいる。

研究成果の概要（英文）：My initial plan for this project was the purely mathematical study in differential geometry and topology, but my research interest has extended also to include algebraic topology. Accordingly I found the potential application and relation with theoretical physics, and it has led me to collaboration with physicists. Especially we had worked on Topological Modular Forms and Segal-Stolz-Teichner program, which is one of the deepest and most important topic connecting homotopy theory and physics. Throughout the research period, we were able to produce various results both in mathematics and physics.

研究分野：数理物理学

キーワード：数理物理学 代数トポロジー ホモトピー論 場の理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

山下は当初、楕円型微分作用素の Fredholm 指数に対する Atiyah-Singer の指数定理にはじまる指数理論の研究、その中でも特に非可換幾何学とよばれる、作用素環論の手法を用いる立場からの研究を主に行っていた。数理論理学との関わりにも興味があり、素粒子物理学者とともに境界つき多様体上の楕円形作用素に対する Atiyah-Patodi-Singer 指数に物理的な再定式化を与える研究等を行っていた。

2. 研究の目的

指数理論の研究や非可換幾何学を用いて、数理論理学や微分幾何学への新たな応用を見出すことが当初の目的であった。しかし研究期間中に研究を進めていくに従って、それらにとどまらず代数トポロジーやホモトピー論にも研究内容を広げることで、理論物理学とも深い関係があることが判明し、ホモトピー論を数理論理学に応用し、両者の関係に関する新展開を探ることも主要な目的に加わった。

3. 研究の方法

理論物理学者、特に素粒子物理学者と共同研究を行った。また海外・国内の研究集会・ワークショップに数多く参加し、研究発表および研究討論、情報収集を行った。コロナ禍において対面型の集会在制限されていた期間にも、オンラインでの研究集会に積極的に参加した。2020 年度に開始した米倉和也氏との共同研究や、2022 年度に開始した立川裕二氏との共同研究はまさにそのようなオンラインの研究集会における議論に端を発するものであった。また、制限が緩和された後は国内・海外のさまざまな研究交流の機会を活かし、Theo Johnson-Freyd 氏や Ying-Hsuan Lin 氏との共同研究をはじめるといった。また、これらの研究成果が認められ、2023 年度末からは Daniel Freed, Constantin Teleman 氏らが中心となって組んでいる国際研究プロジェクトである "Simons Collaborations in Global Categorical Symmetry" に associate investigator として招待され加わった。ここでも本研究テーマに関して国際的に最先端に行く研究者たちとの研究交流の機会を得て、自身の研究に活かしている。

このように研究交流の機会が非常に重要であることを確信したため、2022 年度からは自身で研究セミナーを主催する活動も開始した。主にホモトピー論や数理論理学に興味のある数学の大学院生を集めてオンラインの定期的な勉強会 "Higher category and QFT" を開催するとともに、年に 2 回程度対面形式のワークショップを行った。

4. 研究成果

2020 年度は、数理論理学にかかわる以下の 3 つの研究を行った。第一に、素粒子物理学の格子ゲージ理論に現れる、楕円形作用素の離散近似からどのように Fredholm 指数を復元するか、という問題を扱った。シンプレクティック幾何学で古くから研究されてきた変形量子化の理論と幾何学的量子化の理論を応用することで、格子上の作用素に対する「格子版 Atiyah-Singer 指数定理」を定式化・証明し、上記の問題に解を与えた。これは物理への応用に価値があるだけでなく、変形量子化の理論の新たな応用であり、数学的にも面白い結果である。

第二に、前年度に引き続き、境界つき多様体上の楕円形作用素に対する Atiyah-Patodi-Singer 指数に物理的な再定式化を与える研究を行った。これは数学者である古田幹雄氏、松尾信一郎氏と、物理学者である大野木哲也氏、深谷英則氏、松木 義幸氏、山口哲氏との共同研究である。本年度は、反対称実作用素の場合に定式化される mod 2 指数を扱い、非局所的境界条件を必要としない定式化を得た。

第三に、代数トポロジーを用いた場の理論の分類問題に関する研究を開始した。これは物理学者である米倉和也氏との共同研究である。代数トポロジーが物理学の場の理論の分類に有用であることが明らかにされてきており、特に、Freed と Hopkins は Anderson 双対とよばれる一般コホモロジーが「可逆な場の理論」の分類、さらに「量子異常」の分類を与えると予想した。この予想に着想を得て、そのような理論の分配関数の満たすべき性質を抽象化し構成した数学的对象が実際 Anderson 双対の新たなモデルを与えるという数学的結果を示した。これは数学と物理の橋渡しをする結果であるだけでなく、微分コホモロジー理論との関連から純粋数学的にも面白い。

2021 年度は、前年度に引き続き、数理論理学に関する研究、特に代数トポロジーを用いた場の理論の分類に関する研究を進めた。前年度に開始した米倉氏との共同研究において一般論構築を行い、論文にまとめた。また、数学者の五味清紀氏とともに、微分 K0 理論に新たな物理的なモデルを与える研究を行った。物理で現れる「フェルミオンの質量項」を数学的に定式化したものをを用いたモデルである。

さらに、Segal-Stolz-Teichner 予想に関する研究を開始した。数学的には、Topological Modular Forms (TMF) と呼ばれる一般コホモロジー理論に関する研究であり、これ以降の本研究課題の重

要な核となる。一般コホモロジー理論 TMF は、現代ホモトピー論の「金字塔」ともいえる、純粋数学的に重要な研究対象である。一方、「TMF が 2 次元超対象場の理論を分類する」という Stolz-Teichner 予想を通じて、理論物理学とも深く関係している。

2021 年度には、物理学者の立川裕二氏との共同研究において、「ヘテロティック弦理論の量子異常が存在しない」という結果を示した。これは物理学的な命題であるが、この命題を純粋数学の命題に置き換え、その命題を代数トポロジーの手法によって解決した。

2022 年度は立川氏とともに、前年度に得た結果を深化させる研究を行った。この「量子異常の消滅」(物理学的事実)と「TMF の Anderson 自己双対性」(純粋数学的事実)が実は深く関係していることを証明した。Anderson 自己双対性はホモトピー論の深い結果であり、この事実に物理的解釈を与えたのは、純粋数学的な立場から見ても非常に面白い結果である。また、この結果を応用し、TMF の非自明なねじれ元や power operation 等、今まで純ホモトピー論的な証明しか知られていなかった様々な構造に対して、微分幾何的証明を与えた。

2023 年度には、立川氏との共同研究を論文にまとめるとともに、この研究で得られた知見を元に、数理物理学者である Theo Johnson-Freyd 氏との共同研究を行った。TMF は「576 周期性」という興味深い性質を持つことが数学的事実として知られているが、それに対する場の理論的な解釈は知られておらず、大きな謎の一つとされていた。この「576 周期性」に微分幾何学のかつ場の理論的な解釈を与えたというのが主結果である。

さらに、さまざまな対称性のある超対象場の理論を分類するとされる「同変ねじれ TMF」に関して、物理学者である Ying-Hsuan Lin 氏と数学者である富永章氏との共同研究も開始して、現在進行中である。

本研究はホモトピー論の深い結果を理論物理学に実際に応用した先駆的な研究と言える。例えば本研究で構築した量子異常の分類に関する一般論は、量子異常の解析やトポロジカル物性における相の分類に応用されている。また、量子異常の消滅を示した結果は理論物理学から大きな反響があった。トポロジカルモジュラー形式および Segal-Stolz-Teichner 予想という、ホモトピー論と物理学を結びつける深いトピックの研究に踏み込んだことで、数学・物理双方にさまざまな研究成果を出すことができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kota Hattori and Mayuko Yamashita	4. 巻 -
2. 論文標題 Spectral convergence in geometric quantization -- the case of non-singular Langrangian fibrations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Symplectic Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuji Tachikawa and Mayuko Yamashita	4. 巻 -
2. 論文標題 Topological modular forms and the absence of all heterotic global anomalies	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fukaya Hidenori, Furuta Mikio, Matsuki Yoshiyuki, Matsuo Shinichiroh, Onogi Tetsuya, Yamaguchi Satoshi, Yamashita Mayuko	4. 巻 112
2. 論文標題 Mod-two APS index and domain-wall fermion	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-022-01509-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yamashita Mayuko	4. 巻 -
2. 論文標題 A Lattice Version of the Atiyah-Singer Index Theorem	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-04021-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計24件(うち招待講演 24件/うち国際学会 12件)

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Differential cohomology and physics
3. 学会等名 BU-Keio-Tsinghua 2022 Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Category of QFTs and differential cohomology
3. 学会等名 Stringmath 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Category of QFTs and differential cohomology
3. 学会等名 Operator Algebras: Subfactors, K-theory, Conformal Field Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Algebraic topology and physics
3. 学会等名 RIMS workshop "Women in Mathematics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Fully extended invertible non-topological QFTs and differential Anderson duals
3. 学会等名 Higher Symmetry and Quantum Field Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 Topological Modular Forms and vanishing of heterotic anomaly
3. 学会等名 作用素論・作用素環論研究集会2022, (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Topological Modular Forms and vanishing of heterotic anomaly
3. 学会等名 The 7th Japan-China Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 Algebraic topology and QFT
3. 学会等名 RIMS共同研究「作用素環論における群作用と数理物理の関連」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Algebraic topology and physics
3. 学会等名 Women at the Intersection of Mathematics and Theoretical Physics Meet in Okinawa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Anderson self-duality of topological modular forms and heterotic string theory
3. 学会等名 Theoretical studies of topological phases of matter (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 トポロジカルとは限らない invertible QFTの分類問題と, Anderson dual の " differentialな " モデル
3. 学会等名 第68回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 代数トポロジーと場の理論
3. 学会等名 岡潔女性数学者セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 The classification problem of non-topological invertible QFT 's and a differential model for the Anderson duals
3. 学会等名 作用素環論の最近の進展 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 The differential KO-theory and fermionic mass terms
3. 学会等名 YITP workshop YITP-W-21-11 "Theoretical studies of topological phases of matter" (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Differential pushforwards, Anderson duality and invertible QFT's
3. 学会等名 ICTP virtual meeting "Generalized Cohomology and Physics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 Differential pushforwards, Anderson duality and invertible QFT's
3. 学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 On the absence of all heterotic global anomalies
3. 学会等名 Rikkyo MathPhys 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 A new construction of deformation quantization for Lagrangian fiber bundles
3. 学会等名 45th LQP (Local Quantum Physics) workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 Lagrange トーラス束のstrictな変形量子化と格子ゲージ理論への応用
3. 学会等名 ミラー対称性の諸相 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 トーラス束の変形量子化と格子版Atiyah-Singer指数定理
3. 学会等名 第67回トポロジーシンポジウム・オンライン (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 トールス束の変形量子化と格子版Atiyah-Singer指数定理
3. 学会等名 作用素論・作用素環論研究集会2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 トールス束のstrictな変形量子化と格子ゲージ理論への応用
3. 学会等名 Poisson幾何とその周辺2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 山下真由子
2. 発表標題 トールス束の変形量子化と格子版Atiyah-Singer指数定理
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Mayuko Yamashita
2. 発表標題 The classification problem of non-topological invertible QFT's and a "differential" model for the Anderson duals
3. 学会等名 OIST workshop "Quantum Math, Singularities and Applications" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------