

令和 6 年 5 月 21 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14310

研究課題名（和文）リーマン対称空間における全測地的部分多様体のディンキン指数を用いた研究

研究課題名（英文）Dynkin indices and totally geodesic submanifolds in Riemannian symmetric spaces

研究代表者

奥田 隆幸（Okuda, Takayuki）

広島大学・先進理工系科学研究科（理）・准教授

研究者番号：40725131

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,100,000円

研究成果の概要（和文）：当該研究を通じて、リーマン対称空間の間の全測地的はめ込みに対して、リー代数の理論を用いて split Dynkin index という自然数を定義することに成功した。この対応は複素単純リー代数の間のリー代数準同型の場合に Dynkin index として知られていた概念を一般化したものになっており、リーマン対称空間たちの関係性を理解する上で重要な概念となると考えられる。また各はめ込みに対応する split Dynkin index を計算する手法も開発できた。また研究過程で不連続群と粗幾何学の関連性が明らかになった。これらの結果は現在投稿論文を準備しているところである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマン対称空間と呼ばれる性質を持つ空間は幾何学において基本的かつ重要な研究対象である。本研究はそれらの間の関係性を理解するためのものである。本研究においてはリーマン対称空間の間に全測地的はめ込みという関係性が与えられたとき、それをある尺度において自然数で評価する手法を開発できた。この手法を用いて今後リーマン対称空間の関係性をより深く理解することが可能となった。

研究成果の概要（英文）：Through this research, we successfully defined a natural number called the split Dynkin index for all totally geodesic embeddings between Riemannian symmetric spaces using the theory of Lie algebras. This correspondence generalizes the concept known as the Dynkin index for Lie algebra homomorphisms between complex simple Lie algebras and is considered an important concept for understanding the relationships between Riemannian symmetric spaces. We also developed a method to calculate the corresponding split Dynkin index for each embedding using the concept of complexification. Additionally, during the course of this research, the relationship between discontinuous groups on homogeneous spaces and coarse geometry has been elucidated. These results are currently being prepared for submission as a journal paper.

研究分野：幾何学

キーワード：等質空間 対称空間 部分多様体 粗幾何学

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

連結リーマン多様体であって、各点で「点対称」と呼ばれる変換が定義されているものをリーマン対称空間という。一般にリーマン対称空間の全測地的部分多様体は、それ自身がリーマン対称空間の構造を持つことが知られている。別の言い方をすると、リーマン対称空間 N をリーマン対称空間 M へ全測地的(i.e.測地線を保つ)にはめ込んだとき、その像は M の全測地的部分多様体となり、またその逆に、任意の全測地的部分多様体は上記の方法で得られる。

リーマン対称空間の全測地的部分多様体がリーマン多様体として平坦であるとき、つまり上記の意味では N として平坦なリーマン対称空間(トーラスまたはユークリッド空間)を考えているとき、その全測地的部分多様体は平坦であるという。リーマン対称空間の極大平坦な全測地的部分多様体は等長変換を除いて一意に存在するということが知られており、特に「平坦な全測地的部分多様体」は完全に分類されていると言える。

本研究課題では、「平坦性を仮定しない全測地的部分多様体の分類問題」を研究テーマとする。先に述べたことから、リーマン対称空間 M の全測地的部分多様体を調べることは、別のリーマン対称空間 N から M への全測地的はめ込みを調べることに他ならない。つまり、全測地的部分多様体の研究は「リーマン対称空間の全測地的はめ込みのなす圏」という基本的な圏を調べることに密接に関わっている。

リーマン対称空間内の全測地的部分多様体の分類問題の代表的な先行研究(研究開始当初時点)としては、リーマン対称空間の階数を固定して全測地的部分多様体の分類を行ったもの:

Wolf [Illinois J. Math. (1963)], Chen -Nagano [Duke Math. J. (1977)],

Kimura -Tanaka [Tokyo J. Math. (2008)], Klein [Trans. Amer. Math. Soc. (2009)]

や、全測地的部分多様体にある種の性質(エルミート構造, 鏡映性, 階数極大性, 二次元非平坦性)を要請して分類に取り組んだもの:

Ihara [J. Math. Soc. Japan (1967)], Leung [Indiana Univ. Math. J. (1974)],

Ikawa -Tasaki [Japan J. Math. (2000)], Mashimo [Osaka J. Math. (2019)]

などが挙げられる。

またリーマン対称空間の間の全測地的はめ込みは、非コンパクトな単純リー代数の間のリー代数準同型と代数的な意味対応することが知られているため、このテーマの研究は大きな意味では非コンパクトな実単純リー代数の間のリー代数準同型の分類の研究と同義であると言える。

1950年代に E.B.Dynkin は複素単純リー代数の間のリー代数準同型の分類理論を完成させた([Mat. Sbornik N.S.1952])。その分類理論において最も重要な役割を果たした概念として、今日では Dynkin index と呼ばれるものがある。これは複素単純リー代数とリー代数準同型の成す圏から非負整数のなすモノイド(対象が一点で、射の集合が非負整数全体、合成は積となる圏)への関手を与えるものである。

複素単純リー代数の間のリー代数準同型が分類されている一方で、非コンパクトな実単純リー代数の間のリー代数準同型の分類は未だになされておらず、特に例外型も含めて一般的に考えられるような手法があまり知られていない。

本研究課題は実の場合においても Dynkin index の概念を拡張し、それをリー代数準同型、およびリーマン対称空間の間の全測地的はめ込みの研究に応用しようというものである。

Dynkin index に関する代表的な先行研究(研究開始当初時点)としては、ファイバー束や表現論への応用としては、

Kumar—Narasimhan -Ramanathan [Math. Ann. (1994)],

Balaji [J. Differential Geom. (2007)],

Panyushev [Adv. Math. (2009)],

Kubo [Osaka J. Math. (2014)]

などが挙げられる。また、ディンキン指数の整数性の位相幾何学的証明 (Dynkin [Amer. Math. Soc. Transl. (1959)]), 代数的証明 (Braden [J. London Math. Soc. (1991)]) などが知られている。

2. 研究の目的

本研究の目的は実単純リー代数の間のリー代数準同型、またはリーマン対称空間の間の全測地的はめ込みを調べるための道具として Dynkin index を一般化した概念(split Dynkin index とよぶこととする)を整備しようというものである。

特に split Dynkin index の幾何学的意味付け、および、全測地的はめ込みの障害を構成するための道具としての活用について調べることを主目的とする。

3. 研究の方法

非コンパクトな実単純リー代数 l, g の間のリー代数準同型 $f : l \rightarrow g$ について, ‘split Dynkin index’ $SDind(f)$ を以下で定義することとする:

$$SDind(f) := B_g(f(A_l), f(A_l)) / B_g(A_g, A_g)$$

ただし, B_g は g 上の Killing form とし, A_l, A_g はそれぞれ l, g の shortest coroot とする.

Split Dynkin index を調べることによりリー代数準同型, およびリーマン対称空間の間の全測地的はめ込みについての知見を得ることを考える.

4. 研究成果

本研究を行うことにより以下の結果が得られた:

- (1) Split Dynkin index は実単純リー代数の間のリー代数準同型について非負整数を与えることを示した.
特に, 研究開始当初持っていた証明のアイデアはリー代数の構造論を使う煩雑なものであったが, 本研究において coroot の性質を用いる簡易な証明を得ることができた.
- (2) Split Dynkin index は定義域と値域の automorphism で不変であることを示した.
- (3) Split Dynkin index は Dynkin index の一般化である, すなわち複素単純リー代数の間のリー代数準同型については Dynkin index と split Dynkin index は一致することを示した.
- (4) Split Dynkin index は実単純リー代数とリー代数準同型の成す圏から非負整数のなすモノイドへの関手を与えることを示した.
特にこれにより, 与えられた二つの既約なリーマン対称空間に対して, 「それらに全測地的はめ込みが存在するか」, また「存在する場合にはその index はいくらになるか」という問いについて, 全測地的曲面(または対応する冪零軌道)の研究を応用する目途が立った.
- (5) 実リー代数の間のリー代数準同型 f の split Dynkin index の計算を, f の複素化の Dynkin index の帰着させる手法を確立した.
- (6) Split Dynkin index が 1 であることを極小冪零軌道の言葉を用いて特長付けた.
- (7) 既約コンパクトリーマン対称空間の間の全測地的はめ込みに対して split Dynkin index について Helgason 球面の像の断面曲率(または‘半径’)を用いた特長付けを与えた.
- (8) 2023 年に Adv. Math. から A. Kollross, A. Rodríguez-Vázquez による論文 ‘Kollross--Totally geodesic submanifolds in exceptional symmetric spaces’ が出版された. 彼らの論文は Dynkin index のアイデアを実単純リー代数の間のリー代数準同型に対して定義することによりリーマン対称空間の間の全測地的はめ込みについて研究するものであり, 本研究課題と密接に関連するものである. 彼らの用いた index は上記の split Dynkin index とは異なるものであり, また split Dynkin index を用いて彼らの index を計算する手法についても得られた.

これらの結果は現在投稿論文として準備中である(RIMS 講究録 No.2234 に上記の結果を一部アナウンスしている).

また本研究を行う過程において, 擬リーマン簡約型等質空間 (これはリーマン対称空間の全測地的部分多様体の Moduli 空間と深い関係がある) 上の不連続群論と粗幾何学の関連性に気づいた. この結果は不連続群論において新しい視点を与える有益な結果であり, これについても投稿論文として準備中である.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kento Ogawa, Takayuki Okuda	4. 巻 -
2. 論文標題 A proof of Kobayashi's properness criterion from a viewpoint of metric geometry	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 To appear in Progress in Mathematics, Symmetry in Geometry and Analysis---Festschrift for Toshiyuki Kobayashi (tentative)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 奥田隆幸	4. 巻 39
2. 論文標題 等質空間上の固有な群作用と符号理論の関係について	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 代数的組合せ論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 53--67
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Bannai Eiichi, Nakata Yoshifumi, Okuda Takayuki, Zhao Da	4. 巻 405
2. 論文標題 Explicit construction of exact unitary designs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108457 ~ 108457
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2022.108457	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Cioaba Sebastian M., Koolen Jack H., Mimura Masato, Nozaki Hiroshi, Okuda Takayuki	4. 巻 104
2. 論文標題 On the spectrum and linear programming bound for hypergraphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 European Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 103535 ~ 103535
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ejc.2022.103535	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akira Kubo, Mika Nagashiki, Takayuki Okuda, Hiroshi Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 A commutativity condition for subsets in quandles -- a generalization of antipodal subsets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Differential Geometry and Global Analysis: In Honor of Tadashi Nagano	6. 最初と最後の頁 103--125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/777	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 奥田隆幸	4. 巻 2234
2. 論文標題 Split Dynkin indices for homomorphisms between real simple Lie algebras	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 84--91
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計14件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 奥田 隆幸
2. 発表標題 等質空間上の固有な群作用と符号理論の関係について
3. 学会等名 第39回代数的組合せ論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 等質空間上の固有な群作用と符号理論
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Coarse geometry and Kobayashi's properness criterion
3. 学会等名 The 8th China-Japan Geometry conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Kobayashi's properness criterion and Coarse geometry
3. 学会等名 7th Tunisian-Japanese Conference, Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, in Honor of Professor Toshiyuki Kobayashi (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 デザインの解析的一般化について 2023年11月25日
3. 学会等名 研究集会「実験計画法と関連する組合せ構造および統計教育」(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Kobayashi's properness criterion and Coarse geometry
3. 学会等名 第7回幾何学的群論ワークショップ(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Split Dynkin indices for homomorphisms between real simple Lie algebras
3. 学会等名 2022年度RIMS共同研究(公開型)「表現論とその周辺分野における諸問題」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 梶浦大起, 松本眞, 小川健翔, 奥田隆幸 (講演は奥田)
2. 発表標題 (t,m,s)-nets and profinite association schemes
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ 2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 等質空間上の固有な作用について
3. 学会等名 広島・岡山 代数学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Totally geodesic immersions of direct products of two-spheres in compact symmetric spaces
3. 学会等名 Geometry of symmetric spaces and group actions (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Representation theory and combinatorics on compact homogeneous spaces
3. 学会等名 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Kobayashi's properness criterion and totally geodesic submanifolds in locally symmetric spaces
3. 学会等名 東京大学 Lie群論・表現論セミナー, トポロジー火曜セミナー(合同開催) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 対称R空間の大対蹠集合に定まる距離推移グラフ構造
3. 学会等名 筑波大学 微分幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 粗幾何学と小林固有性判定定理
3. 学会等名 大阪大学数学教室 幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

reserachmap (Takayuki Okuda) https://researchmap.jp/takayuki_okuda/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	田丸 博士 (Tamaru Hiroshi)		
研究協力者	久保 亮 (Kubo Akira)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Geometry, Analysis, and Representation Theory of Lie Groups In honour of Prof. Toshiyuki Kobayashi's birthday	開催年 2022年～2022年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------