

令和 6 年 6 月 24 日現在

機関番号：32201

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14315

研究課題名（和文）擬リーマン沈めこみにおける非負曲率性と基本群について

研究課題名（英文）On the fundamental group and non-negativity of curvature for pseudo-Riemannian submersion

研究代表者

椋野 純一（Mukuno, Junichi）

足利大学・工学部・講師

研究者番号：50737301

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究では次の結果を得た。擬リーマン対称空間のランク1の場合に関して、アンダーソン--ホワードの意味で正曲率条件を満たすものの特徴づけを与えた。また、リーマン幾何で正曲率リーマン多様体の族としてよく知られているアロフ--ウォリッシュ空間のある種の擬リーマン化したものの部分的な族がアンダーソン--ホワードの意味で正曲率条件を満たすことを示した。さらに、アンダーソン--ホワードの意味で正曲率条件を満たし、さらに、ある種の対称性のある左不変擬リーマン計量をもつ非コンパクト実半単純リー群に関する剛性現象を示すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

アンダーソン--ホワードの意味で正曲率条件を満たす例として研究代表者の結果以外で知られていたものは捩れ積やその計量を変形した多様体、ユークリッド空間内の超曲面であった。本研究の結果の学術的意義は、擬リーマン等質多様体の非自明な例というこれまであまり知られていなかったクラスの例やそれらに関する性質を発見したことであり、擬リーマン幾何における曲率の比較定理に関する理論の新しい進展を示唆するものである。

研究成果の概要（英文）：The following results were obtained in this research : for the rank 1 pseudo-Riemannian symmetric spaces, we gave a characterization of those satisfying the positive curvature condition in the sense of the Andersson--Howard. We also showed that a certain pseudo-Riemannized subfamily of Aloff--Wallach spaces, which are well known in Riemannian geometry as the family of Riemannian manifolds with positive curvature, satisfies the positive curvature condition in the sense of Andersson--Howard. Furthermore, we showed a rigidity phenomenon concerning noncompact real semisimple Lie groups with left-invariant pseudo-Riemannian metrics with a certain symmetry of positive curvature in the sense of Andersson--Howard.

研究分野：幾何学

キーワード：擬リーマン多様体 正曲率 等質空間 対称空間 リー群

## 1. 研究開始当初の背景

微分幾何における基本的な問題の一つに「局所的な情報である曲率が大域的な位相構造へどのような影響を及ぼすか」がある。当問題に関して、リーマン幾何では多くの研究成果が知られているが、一般の擬リーマン幾何ではあまり結果が知られていない。困難さの原因の1つは、リーマン幾何で変分法を使う場合に計量の正定値性が本質的に使われていることにある。しかし、そのような困難さがあるにも関わらず、リーマン幾何と擬リーマン幾何に類似現象が起きることがいくつか知られている。例えば、リーマン幾何で正曲率性と完備性から基本群の有限性を示したマイヤースの定理と擬リーマン幾何で正の定曲率性と完備性から基本群の有限性を示したカラビ--マルクス定理の関係である。小林俊行氏は「擬リーマン幾何においてマイヤースの定理のようにある種の曲率の正値性を満たす場合に基本群が有限になるか」という予想を提示した。研究代表者は、リーマン幾何における断面曲率が下から正の定数で有界であるという曲率条件を自然に一般化したアンダーソン--ホワードの正曲率条件の下で小林氏の予想について考察した。研究代表者は、小林の問題から期待される基本群の有限性は成り立たないが、ある種のリーマン部分多様体の基本群の有限性が成り立つことを示唆する結果を与えた。この証明にはある種の特異点定理の類似結果を用いて証明される。そこで、特異点定理のアプローチを発展させたいと考えた。また、アンダーソン--ホワードやアレクサンダー--ビショップらの先行研究により、アンダーソン--ホワードの正曲率条件を満たす例は捩れ積の例や、その亜種、もしくは不定値計量を持つユークリッド空間内の超曲面などが知られていた。しかし、微分幾何において重要なクラスである等質空間の例はあまり知られていなかった。当分野の新たな進展のために等質空間での状況を理解したいと考えた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、アンダーソン--ホワードの正曲率条件を満たす擬リーマン多様体  $(M, g)$  で等質多様体となる例を構成し、 $(M, g)$  が完備でないための十分条件を与え、さらに、 $(M, g)$  が完備であるとき、その基本群の構造を明らかにすることである。特に、等質多様体のクラスの例として、左不変計量を持つリー群、対称空間、対称空間でない等質空間などがあるが、各クラスに限定した場合にどのような現象が起こるかを明らかにすることを目指す。完備性に関しては相対性理論の特異点定理の類似現象が擬リーマン幾何で成り立つかを明らかにすることを目指す。

## 3. 研究の方法

アンダーソン--ホワードの意味で正曲率条件を満たす擬リーマン等質多様体の例の構成に関して、リーマン幾何の結果の擬リーマン幾何での類似が成り立つかを調べる。例の構成における問題点は断面曲率の値としては零や負の値も取りうることである。これは、リーマン幾何の通常の正曲率の場合と異なる状況となっている。正曲率なリーマン多様体の例の構成では、具体的な下から有界な定数の値を与えずに、断面曲率が正であることのみを示し、コンパクト性からある正の値で下から抑えられることを示すことがしばしばある。一方で、擬リーマン幾何では、具体的な下から有界な定数の値を与えて、不等式評価をする必要がある。左不変リーマン計量をもつリー群の場合では、ウォリッシュの定理「コンパクトリー群が左不変リーマン計量をもち、断面曲率が正であるならば、そのリー環は  $\mathfrak{su}(2)$  と同型である」よりほとんどないことが知られている。同様に、擬リーマン幾何ではどうか、つまり、擬リーマン幾何においても左不変計量を持つ場合で正曲率なものがどれだけあるかを研究する。次に、対称空間の場合でのリーマン幾何の結果として「正曲率で既約なリーマン対称空間はランク1対称空間のみである」ということが知られている。これの類似が擬リーマン幾何で成り立つかどうかを研究する。対称空間でない等質空間の例としてアロフ--ウォリッシュ空間などがよく知られている。一部の例のみ擬リーマン化した結果を以前示した。これをより一般的な形で示せるかを試みる。完備性に関しては、以前の研究代表者の結果からねじれ積の場合に特異点定理を与えることができたが、ツイスト積や本研究の中で構成した例において特異点が生じた場合を中心に研究する。

## 4. 研究成果

まず、リー群について得た結果について述べる。ある種の対称性をもつ左不変擬リーマン計量をもつ非コンパクト実半単純リー群の次元は3に限定されるという剛性現象を示すことができた。ウォリッシュの定理の擬リーマン化した部分的結果である。ウォリッシュの定理と比較すると、コンパクトと非コンパクトの違いがあり、半単純のクラスに限定した結果である。ただ、非コンパクト実半単純リー群はキリング形式という自然な擬リーマン計量を持っていることから、擬リーマン幾何のリー群のクラスとしては自然な研究対象であることに注意する。次に、擬リーマン対称空間に関して得た結果について述べる。ランク1の場合に関して、アンダーソン--ホワードの意味で正曲率条件を満たすものの特徴づけを与えた。これにより、ランク1擬リーマン対称空間はアンダーソン--ホワードの意味で正曲率条件のものとそうでないものに分

かれることを示した。これは、リーマン幾何には無かった擬リーマン幾何特有の現象であり、擬リーマン対称空間の曲率の性質の一端を明らかにした結果である。また、リーマン幾何で正曲率リーマン多様体の族としてよく知られているアロフ--ウォリッシュ空間のある種の擬リーマン化したものの部分的な族がアンダーソン--ホワードの意味で正曲率条件を満たすことを示した。上記の結果を論文としてまとめる予定である。一方で、本研究で重要な位置を占める完備性に関しての研究については、本研究で得られた例は完備であり、残念ながら、期間中にまとめた成果を得ることができなかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Mukuno Jun-ichi	4. 巻 29
2. 論文標題 On the fundamental group of semi-Riemannian manifolds with positive curvature tensor	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Analysis and Geometry	6. 最初と最後の頁 1255 ~ 1277
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/cag.2021.v29.n5.a8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 棕野純一
2. 発表標題 正曲率な左不変擬リーマン計量をもつリー群について
3. 学会等名 第4回 i-seminar
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 棕野純一
2. 発表標題 On fundamental groups and examples of semi-Riemannian manifolds with positive curvature tensor (ポスター発表)
3. 学会等名 XI International Meeting on Lorentzian Geometry (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 棕野純一
2. 発表標題 正曲率テンソルを持つ擬リーマン多様体の例について
3. 学会等名 第2回 i-seminar (招待講演)
4. 発表年 2022年

1．発表者名 棕野純一
2．発表標題 正曲率テンソルをもつ擬リーマン多様体とその例について
3．学会等名 葉層構造の幾何学とその応用（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 棕野純一
2．発表標題 Aloff-Wallach spaceの擬リーマン化について
3．学会等名 第3回 i-seminar（招待講演）
4．発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6．研究組織			
	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------