

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2023

課題番号：20K14321

研究課題名（和文）K安定性の深化

研究課題名（英文）Towards a deeper understanding of K-stability

研究代表者

齋藤 俊輔（Saito, Shunsuke）

東京理科大学・理学部第一部数学科・助教

研究者番号：10846752

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：偏極多様体の安定性に関して次の研究成果を得た：（1）漸近的チャウ半安定性の障害が消えているような偏極トーリック曲面がK準安定ならば漸近的チャウ準安定である。（2）端的ケーラーベクトル場の量子化を用いて相対チャウ安定性を新たに定義した。（3）すべて偏極について一様相対K安定だが相対Ding不安定な非同変トーリックファノ多様体の例を3以上のすべての次元に構成した。（4）四ッ谷-Zhouによる3次元非同変トーリックファノ多様体の相対K安定性の分類の誤りを発見した。（5）Segre多様体の超平面切断が反標準偏極についていつK安定であるかを完全に決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

偏極代数多様体は数学において基本的な研究対象であり、その分類を行う上で標準計量の存在・非存在あるいは安定性・不安定性といった情報は重要な役割を担う。本研究課題の研究成果は、当該研究分野の中心的な問題について決定的な解答を与えるといった類のものではないが、トーリック多様体や超平面切断などの具体的な代数多様体の分類に関して素朴だが興味深い問題をいくつか提示できたという点で発展性や意義のあるものだとと言える。

研究成果の概要（英文）：I have obtained the following results related to the stability of polarized varieties: (1) For a polarized toric surface on which the obstructions of asymptotic Chow semistability vanish, K-polystability implies asymptotic Chow polystability; (2) A new definition of relative Chow stability by means of a quantization of extremal vector fields has been given; (3) Examples of relatively Ding unstable toric Fano manifolds which are uniformly relatively K-stable for any polarization have been given for all dimensions greater than or equal to three; (4) Errors in Yotsutani-Zhou's classification of relative K-stability of smooth toric Fano 3-folds have been found; (5) K-stability of hyperplane sections of Segre varieties for anticanonical polarization have been determined completely.

研究分野：複素幾何学

キーワード：K安定性 漸近的Chow安定性 トーリック多様体 一様相対Ding安定性 満測定数 相対K安定性 超平面切断

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

複素数体上で定義された非特異偏極代数多様体に対して「偏極類がスカラー曲率一定ケーラー計量を含むこととその多様体が K 安定であることは同値である」という主張は Yau-Tian-Donaldson 予想として知られ、その解決を目指すことはこの 30 年ほどケーラー幾何学の中心的な話題であった。ファノ多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の場合は Chen-Donaldson-Sun、Tian によって肯定的に解決されており、一般の場合は「スカラー曲率一定ケーラー計量の存在が K 安定性を導く」ことが満洲、Stoppa、Berman-Darvas-Lu らによって証明されている。一方で、 K 安定性がスカラー曲率一定ケーラー計量の存在より真に弱い可能性が Apostolov-Calderbank-Gauduchon-Tønnesen-Friedman によって示唆されている。そこで K 安定性を様々な観点から強化したものが Székelyhidi、満洲、Dervan、Boucksom-久本-Jonsson などから複数提案され、スカラー曲率一定ケーラー計量等の標準ケーラー計量との関係が個別に研究されてきた。

2. 研究の目的

本課題における研究の目的は、複数存在する K 安定性の強化概念や漸近的チャウ安定性など、標準ケーラー計量の存在と関連する幾何学的不変式論の安定性の性質を精密に調べ、それらの間の相互関係を明確にすることである。また Calabi によって導入された端的ケーラー計量の存在問題に対しては安定性の相対版が考えられるので、こちらについても前述と同様の問題を考える。

3. 研究の方法

上記の目的を達成するために、トーリック多様体や超曲面など具体的な多様体を考察することから始めた。特にトーリック多様体については、本課題の実施以前に行った研究の蓄積、強力な武器である凸解析、さらに計算機による解析結果などを大いに利用した。また非特異トーリックファノ多様体においては満洲ソリトンという標準ケーラー計量の存在・一樣相対 Ding 安定性・満洲定数が 1 未満であることの 3 つの同値性が Yao によって証明されている。この内、満洲定数は扱いの非常に容易な対象であり、これを軸としてファノ多様体の安定性に関する研究を行った。

4. 研究成果

(1) 偏極トーリック曲面の漸近的チャウ安定性に関する研究

複素数体上で定義された非特異偏極代数多様体に対して「漸近的チャウ半安定性の障害が消えているならば、スカラー曲率一定ケーラー計量の存在から漸近的チャウ準安定性が導かれる」ことが満洲氏によって証明されている。他方、Yau-Tian-Donaldson 予想が正しいとすれば、スカラー曲率一定ケーラー計量の存在を K 安定性 (の強化概念) に置き換えた純代数幾何学的主張が成立するはずである。そこで私と新田泰文氏は偏極トーリック曲面に対して「漸近的チャウ半安定性の障害が消えているならば、 K 準安定性から漸近的チャウ準安定性が導かれる」ことを証明した (研究集会にて発表済み)。系として、漸近的チャウ半安定性の障害が消えているデルペッツォ曲面に対して、 K 準安定性・漸近的チャウ準安定性・漸近的チャウ半安定性・ K 半安定性のすべてが同値であることがわかる。証明の方針は満洲氏と新田氏による「強 K 安定ならば漸近的チャウ安定である」という結果と本質的に同じ流れであるが、Linke による有理凸多面体に対する Ehrhart 理論を用いる必要がある。

我々の結果はトーリック曲面という限定的なものを対象としているが、基礎体が複素数体に限らない標数 0 の代数閉体でよいことと曲面が特異点をもってもよいことの 2 点が満洲氏の結果とは大きく異なる。

トーリックや曲面という技術的な制限を外し、一般の偏極代数多様体に対して前述の定理を確立することは重要な問題である。また相対安定性の場合に一般化することも重要である (その場合には次に述べる新しい意味での漸近的相対チャウ安定性を採用することが適切であろう)。

(2) 端的ケーラーベクトル場に関する研究

端的ケーラーベクトル場とは二木-満洲によって導入されたコンパクトケーラー多様体上の正則ベクトル場で二木不変量の双対となっているものである。これは相対安定性の定義に用いられるなどケーラー幾何学的に非常に重要な概念である。私と新田氏は端的ケーラーベクトル場の量子化、すなわち端的ベクトル場と同様の性質をもつ正則ベクトル場の

列であって端的ベクトル場を極限とするものを発見した。さらに、これを用いて相対チャウ安定性の新たな定義を与えた。

従来の意味では漸近的相対チャウ不安定だが我々の意味では漸近的相対チャウ安定な 3 次元非特異トーリックファノ多様体が存在するため、これは真に新しい安定性である。

端的ケーラーベクトル場の量子化より満測定数の量子化を定義することができるのでその性質を調べることは興味深い問題だと思われる。

(3) 満測定数に関する研究

満測定数は満測氏によって導入されたファノ多様体の正則不変量であり、前述の通り満測ソリトンの存在や一様相対 Ding 安定性と密接な関わりがある。私と新田氏は、満測定数がファノ多様体の直積の下で加法的に振る舞うことを証明し、応用として「すべての偏極について一様相対 K 安定であるが相対 Ding 不安定であるような非特異トーリックファノ多様体の例」を 3 以上のすべての次元に構成した（査読論文として出版済）。なお本課題を開始するより前に我々はこのような例を得ていたが、その時点では一様相対 K 安定性は反標準偏極に限定されており、本研究を通じて結論を強めることができた。また新田氏・四ッ谷直仁氏との共同研究において上記のような例を、3 次元と 4 次元に構成した（査読論文として出版済）。これは Bott 塔構造を利用したものであり、満測定数の加法性による構成とはまったく異なる。

元々「一様相対 Ding 安定性は反標準偏極に関する一様相対 K 安定性を導く」ことが知られていたため、我々の例はこれら 2 つの安定性の差異を明確に示していると考えられる。

(4) 相対 K 不安定性の十分条件に関する研究

偏極代数多様体の中で最も理解しやすいものは（非特異）トーリックファノ多様体であろう。その一つの理由として、対応する運動量多面体の分類によって低次元の場合には完全なリストが存在することが挙げられる。さらに、多面体の重心がユークリッド空間の原点と一致するか否かでその多様体が反標準偏極について K 安定であるか否かを決定できる。しかし、相対 K 安定性については理解があまり進んでいない。四ッ谷-Zhou はトーリックファノ多様体が相対 K 不安定であるための多面体的な十分条件を開発し、3 次元非特異トーリックファノ多様体について相対 K 安定性であるものを完全に分類した。私と新田氏は、彼らの十分条件を満たす 3 次元の例が存在しないことを証明し、四ッ谷-Zhou の分類の誤りを発見した（査読論文として出版済）。

結果として、18 個ある 3 次元非特異トーリックファノ多様体のうち、13 個は（一様）相対 K 安定であるが残りの 5 つについてはまったく未知の状態になっている。これを完成させることは重要な問題であろう。

(5) Segre 多様体の超平面切断に関する研究

埴野は Segre 多様体の非特異超平面切断の自己同型群がある状況下で簡約でないことを証明し、すべてのケーラー類におけるスカラー曲率一定ケーラー計量の非存在を結論付けた。Yau-Tian-Donaldson 予想が正しいとすればこのような多様体はすべての偏極類について K 不安定であるべきである。しかし現状では自己同型群の構造と K 安定性には直接の関係はないため、これは推測の域を出ない。そこで私はまず、2 つの射影空間の直積内のファノ超曲面に対して、自己同型群の一径数部分群の Donaldson-二木不変量を具体的に計算する公式を証明した。次にこの公式を用いて双次数 $(1, 1)$ の正規超曲面（すなわち Segre 多様体の正規超平面切断）の反標準偏極に関する K 安定性を完全に決定した。結論は次の通り：(a) 2 つの射影空間の次元が等しくかつ超平面切断が非特異であるとき K 準安定である (b) それ以外の場合すべて K 不安定である。今回の結果は超平面切断が非特異である必要がない点と K 不安定性を直接証明している点で埴野のものとは異なっており、いわば代数幾何的な拡張になっている。また (b) の場合、超平面切断の二木不変量が 0 でないことがわかり、反標準偏極に関する相対 K 安定性や相対 Ding 安定性について議論する余地があることが判明した。

なお、本研究課題が終了した直後、Donaldson-二木不変量の公式をすべての偏極に関して拡張することができた。そのため前述 (b) の K 不安定性や二木不変量が 0 でないことが実際にはすべての偏極に関して成立していることになり、埴野の結果を完全に代数化することができている。

K 不安定な Segre 多様体の超平面切断が相対 K 安定であるか否かを決定することは非常に興味深い問題だと思われる。非特異の場合であれば、端的ケーラー計量の存在の方面から考察を行うのも面白い（例えば、射影空間の直積の次元が 3 の場合、超平面切断は Hirzebruch 曲面と同型であるが、これはすべてのケーラー類に端的ケーラー計量を含むことが知られている）。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Nitta Yasufumi, Saito Shunsuke, Yotsutani Naoto	4. 巻 9
2. 論文標題 Relative Ding and K-stability of toric Fano manifolds in low dimensions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-023-00617-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nitta Yasufumi, Saito Shunsuke	4. 巻 46
2. 論文標題 A note on the Yotsutani-Zhou condition for relative K-instability	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 219-227
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2996/kmj46205	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nitta Yasufumi, Saito Shunsuke	4. 巻 152
2. 論文標題 Examples of relatively Ding unstable Calabi dream manifolds	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 553-558
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/16643	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 齋藤俊輔
2. 発表標題 偏極トリーク多様体の相対安定性・不安定性の多面的な十分条件について
3. 学会等名 神楽坂微分幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 齋藤俊輔
2. 発表標題 偏極トーリック曲面の漸近的Chow安定性について
3. 学会等名 第68回幾何学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shunsuke Saito
2. 発表標題 Algebro-geometric stabilities for polarized toric varieties
3. 学会等名 The 27th Symposium on Complex Geometry (Kanazawa) 2021（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関