

令和 5 年 6 月 20 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究

研究期間：2020～2022

課題番号：20K14323

研究課題名（和文）完全WKB解析と位相的漸化式によるパンルヴェ方程式の研究

研究課題名（英文）Studies on exact WKB analysis, topological recursion and Painleve equation

研究代表者

岩木 耕平（IWAKI, Kohei）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：00750598

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：完全WKB解析と位相的漸化式との架け橋となる量子曲線の理論をもとに、自由エネルギーに起こるStokes現象とBPS構造の関係性や、スペクトル曲線の周期とパンルヴェ方程式の解の挙動の解析を行なった。位相的漸化式によるBPS構造に付随したRiemann-Hilbert問題の解の構成（Omar Kidwai氏との共同研究）や、不確定共形ブロックとアクセサリー・パラメータの漸近展開との比較を有じたZamolodchikov予想の検証（名古屋創氏との共同研究）に関する成果も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、背景の全く異なる数学的对象の間に新たな関係性を構築することを目標としたものである。周期と可積分性との関係性に関して、背後にある数学的構造の解明に向けて、様々な知見を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：We investigated a relationship among the exact WKB analysis, topological recursion and Painleve equation, based on the theory of quantum curves. We succeeded in constructing a solution to the BPS Riemann-Hilbert problem via the topological recursion (joint work with Omar Kidwai). We also studied a relation between the irregular conformal block and accessory parameter to test the irregular-version of Zamolodchikov's conjecture (joint work with Hajime Nagoya).

研究分野：微分方程式、可積分系、特殊函数

キーワード：完全WKB解析 位相的漸化式 パンルヴェ方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

微分方程式の漸近解析の手法の一つである完全 WKB 解析と、行列模型に起源を持つ位相的漸化式という全く異なる背景を持つ2つのトピックがある。これらの分野を結びつける「量子曲線の理論」が2012年頃に見出され、現在に続くまで活発に研究されている。J. Andersen 氏、M. Kontsevich 氏、B. Eynard 氏と M. Marino 氏が牽引する「Recursive and Exact New Quantum Theory」という大規模な研究プロジェクトが欧州研究会議 (ERC) の助成の下で2018年に発足し、位相的漸化式における Stokes 構造 (resurgence 構造) の解析が一つの重要な研究テーマに選ばれた。量子曲線による完全 WKB 解析と位相的漸化式の関係性は、この研究テーマの発展の鍵を握ることが期待されており、理論を発展させる新たな発見が求められている状況であった。

一方、2018年に研究代表者岩木と小池達也氏、竹井優美子氏による共同研究で、完全 WKB 解析、位相的漸化式、Voros 係数の間の関係性に関するいくつかの成果が得られた。この成果を元に、当時名古屋大学多元数理科学研究科の外国人特別研究員 O. Kidwai 氏との上記の Stokes 構造の解明に向けた共同研究を2019年に開始した。また、それと同時期に、研究代表者岩木は位相的漸化式によるパンルヴェ方程式の 函数の新たな構成法を発見した。これは当該分野で興味を持たれていた Gamayun-Iorgov-Lisovyy 公式の不確定特異点を許す場合のある種の拡張に相当し、パンルヴェ方程式を介した位相的漸化式、完全 WKB 解析、共形場理論の間の関係の探求に向けた大きな一歩となる成果であった。

2. 研究の目的

上記の完全 WKB 解析と位相的漸化式、さらにそこにパンルヴェ方程式を交えた様々な数学的対象の間の関係性をより深く探求することが研究の目的である。より具体的には、以下を研究目的とした。

(1) 小池達也氏、竹井優美子氏との共同研究で扱ったクラスの例に対し、位相的漸化式の Stokes 構造を解析すること。位相的漸化式の分配函数の Borel 変換の特異性を解析し、Stokes 現象による Borel 和の不連続性を記述する公式を求めること。

(2) 位相的漸化式で構成されるパンルヴェ方程式の 函数と、共形場理論により Gamayun-Iorgov-Lisovyy 公式を用いて構成される 函数との比較を行うこと。位相的漸化式の分配函数のパラメータに関する漸近展開を具体的に計算し、(不確定)共形ブロックの漸近展開との比較を行うこと。

(研究計画申請書に記載した解決すべき課題の一部は研究機関中に解決されたため、関連する上記の問題を研究課題として新たに設定した。)

3. 研究の方法

(1) 完全 WKB 解析における Voros 係数に対する Stokes 現象はクラスター変換で記述されることが研究代表者岩木と中西知樹氏の共同研究により2014年に示されていた。この Stokes 現象のある側面と密接に関わる概念である「BPS 構造」を用いて、量子曲線を通じて対応する位相的漸化式の分配函数の Stokes 構造を解析した。なお、この BPS 構造は、Donaldson-Thomas 不変量の壁越え現象と Riemann-Hilbert 問題を関連づけるべく、2016年に T. Bridgeland 氏が導入したものである。

(2) 2021年に O. Lisovyy 氏と A. Naidiuk 氏が、不確定特異点を有する一部の合流型 Heun の微分方程式のアクセサリ・パラメータの漸近展開を求める手法を考案した。彼らの手法は WKB 解析と非常に相性が良いので、それを参考にして、量子曲線を通じて位相的漸化式の分配函数の漸近展開を求める手法を考案し、得られた計算結果と不確定共形ブロックを比較した。

4. 研究成果

得られた研究成果は以下である。

(1) BPS 構造と位相的漸化式を比較し、あるクラスのスペクトル曲線について自由エネルギーを付随する BPS 指数により明示的に記述する公式を与えることに成功した。さらに、位相的漸化式が定める分配函数の Borel 和が、BPS 構造に付随した Riemann-Hilbert 問題の 函数と本質的に一致することを示した。これらは種数が0の2次のスペクトル曲線に関する考察であるが、3次以降のスペクトル曲線に対しても同様の主張が成立することを予想として定式化し、その傍証となるいくつかの観察を行った。以上は Omar Kidwai 氏との共同研究により得られた成果であり、すでに *Advances in Mathematics* と *Communications in Mathematical Physics* から1本ずつ論文が出版されている。これにより、あるクラスのスペクトル曲線に対しては、その分配函

数の Stokes 構造が厳密に解明されたことになる。

(2) 楕円曲線をスペクトル曲線として定まる分配函数の漸近展開を記述する手法を考案した。Lisovyy 氏と Naidiuk 氏による先行研究を参考に、漸近展開の計算アルゴリズムを与え、得られた漸近展開公式が対応するパンルヴェ方程式の漸近展開公式と最初の数行が整合的であることを確認した。これは研究代表者の先行研究を通じて得られると期待されるべき内容と整合的である。さらに、応用として正則アノマリー方程式を通じた自由エネルギーの機能的な計算アルゴリズムを与えることにも成功した。これは物理学者による位相的弦理論の分配函数が位相的漸化式により定義できることを示唆する内容であり、重要な成果であると考えられる。また、Oleg Lisovyy 氏との共同研究を通じて爆発公式との関係性に関する研究も行った。これらの成果について論文を準備中であり、近いうちにプレプリントとして公開する予定である。

(3) 上記(2)の漸近展開公式の導出法を応用し、不確定共形ブロックの展開公式とアクセサリー・パラメータに関する Zamolodchikov 予想の検証に関して、positive な計算結果が得られた。不確定特異点不分岐な場合には Lisovyy 氏と Naidiuk 氏が既に計算結果を得ていたが、我々は分岐を許す不確定特異点に対しても同様の成果を得ることができた。これは名古屋創氏との共同研究に基づくもので、論文を準備中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Fuji Hiroyuki, Iwaki Kohei, Murakami Hitoshi, Terashima Yuji	4. 巻 386
2. 論文標題 Witten--Reshetikhin--Turaev Function for a Knot in Seifert Manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 225 ~ 251
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-021-03953-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Iwaki Kohei, Kidwai Omar	4. 巻 398
2. 論文標題 Topological recursion and uncoupled BPS structures I: BPS spectrum and free energies	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108191 ~ 108191
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2022.108191	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Iwaki Kohei	4. 巻 377
2. 論文標題 2-Parameter τ -Function for the First Painlevé Equation: Topological Recursion and Direct Monodromy Problem via Exact WKB Analysis	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1047 ~ 1098
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-020-03769-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Iwaki Kohei, Koike Tatsuya, Takei Yumiko	4. 巻 24
2. 論文標題 Voros Coefficients for the Hypergeometric Differential Equations and Eynard-Orantin's Topological Recursion: Part I For the Weber Equation	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincaré	6. 最初と最後の頁 1305 ~ 1353
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-022-01235-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Iwaki Kohei, Kidwai Omar	4. 巻 399
2. 論文標題 Topological Recursion and Uncoupled BPS Structures II: Voros Symbols and the τ -Function	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 519 ~ 572
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-022-04563-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計14件 (うち招待講演 13件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion, quantum curves and Painleve equations
3. 学会等名 Applicable resurgent asymptotics: towards a universal theory, ARA Focus Week, Exact Quantisation/Exact WKB and Resurgence (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion, Painleve tau--function and exact WKB analysis
3. 学会等名 Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras and Topological Recursion (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion, uncoupled BPS structures and exact WKB
3. 学会等名 BPS states, mirror symmetry and exact WKB (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion, uncoupled BPS structures and exact WKB analysis
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Integrable Systems 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 完全 WKB 解析とその周辺
3. 学会等名 日本数学会関数方程式論分科会 特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 Topological recursion for hypergeometric type spectral curves
3. 学会等名 ミラー対称性の諸相2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion and uncoupled BPS structure arising from spectral curves of hypergeometric type
3. 学会等名 Strings and QFTs for Eurasian time zone (online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion and uncoupled BPS structure arising from spectral curves of hypergeometric type
3. 学会等名 SISSA's Integrable System and Mathematical Physics Seminar (online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion, exact WKB analysis and Painleve equation
3. 学会等名 Integrable Systems 2020 (online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Voros coefficients for isomonodromy systems associated with Painleve equations and BPS invariants
3. 学会等名 Prospects in microlocal analysis and asymptotic analysis (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Voros coefficients for isomonodromy systems associated with Painleve equations and BPS invariants
3. 学会等名 Painleve Equations : From Classical to Modern Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion, BPS structure and Painleve σ -function
3. 学会等名 Workshop on Mirror symmetry and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Series expansion of accessory parameters of confluent Heun equations with a ramified irregular singular point
3. 学会等名 Workshop on Accessory Parameters (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 Topological recursion for elliptic curves
3. 学会等名 位相的漸化式と正則アノマリー方程式
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Painleve Equations : From Classical to Modern Analysis	開催年 2022年 ~ 2022年
--	----------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	University of Birmingham			
フランス	University of Tours			